SÉRIE A, N° 4418
N° D'ORDRE :
5266

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

ODILE BETBEDER-MATIBET

1re THÈSE. — ÉTUDE DE L'ÉQUATION DE TRANSPORT DANS UN LIQUIDE DE FERMI IMPUR.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 26 janvier 1965 devant la Commission d'examen.

M. YVON *Président.*
MM. AIGRAIN, NOZIÈRES } *Examinateurs.*

1965
GAUTHIER-VILLARS ÉDITEUR
PARIS

Série A, N° 4418
N° d'ordre :
5266

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

ODILE BETBEDER-MATIBET

1re THÈSE. — ÉTUDE DE L'ÉQUATION DE TRANSPORT DANS UN LIQUIDE DE FERMI IMPUR.

2e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 26 janvier 1965 devant la Commission d'examen.

M. YVON *Président.*
MM. AIGRAIN, NOZIÈRES } *Examinateurs.*

1965
GAUTHIER-VILLARS ÉDITEUR
PARIS

UNIVERSITÉ DE PARIS

FACULTÉ DES SCIENCES

Doyen ..... M. ZAMANSKY

PROFESSEURS

G. JULIA	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparée.
GRASSÉ	T	Évolution des êtres organisés.
PRÉVOST	T	Chimie organique.
WYART	T	Minéralogie et Cristallographie.
TEISSIER	T	Zoologie.
MANGENOT	T	Biologie végétale (Orsay).
AUGER	T	Physique quantique et Relativité.
MONNIER	T	Physiologie générale.
PIVETEAU	T	Paléontologie.
ROCARD	T	Physique (E.N.S.).
CARTAN	T	Mathématiques (E.N.S.).
LAFFITTE	T	Chimie générale.
FAVARD	T	Géométrie supérieure.
COULOMB	T	Physique du Globe.
Mlle COUSIN	T	Biol. animale (S.P.C.N.).
CHRÉTIEN	T	Chimie minérale.
DRACH	T	Zoologie.
KASTLER	T	Physique (E.N.S.).
EPHRUSSI	T	Génétique.
RIVIÈRE	T	Géologie (S.P.C.N.) et Sédimentologie (Orsay).
GAUTHERET	T	Biologie végétale (P.C.B.).
R. LUCAS	T	Recherches physiques.
A. THOMAS	T	Biologie cellulaire.
ARNULF	T	Optique appliquée.
MORAND	T	Physique Enseignement.
SOLEILLET	T	Physique (P.C.B.).
FORTIER	T	Mécanique expérim. des fluides.
PETIT	T	Biologie maritime.
QUENEY	T	Météorologie et dynamique atmosphérique.
GALLIEN	T	Embryologie.
EICHHORN	T	Botanique.
DE CUGNAC	T	Biologie végétale (S.P.C.N.).
Mlle CAUCHOIS ..	T	Chimie Physique.
THELLIER	T	Physique du globe.
L'HÉRITIER	T	Biologie générale (Orsay).
GRIVET	T	Radioélectricité (Orsay).
PONCIN	T	Mécanique générale.
DUBREIL	T	Arithmétique et théorie des nombres.
QUELET	T	Chimie organique.
CAGNIARD	T	Géophysique appliquée.
CHAMPETIER	T	Chimie macromolécul.
CUVILLIER	T	Micropaléontologie.
JUNG	T	Géologie.
TRILLAT	T	Microscopie et diffraction électronique.
WIEMANN	T	Chimie org. et structurale.
JACQUINOT	T	Spectroscopie et physique céleste (Orsay).
VASSY	T	Physique de l'atmosphère.
DESTOUCHES ...	T	Théories physiques.
AMIEL	T	Chimie générale.
HOCART	T	Minéralogie et Cristallographie.
J. P. MATHIEU .	T	Physique (Optique).
COUTEAUX	T	Cytologie.
MAY	T	Zoologie (Orsay).
CHOQUET	T	Théorie des fonctions et topologie.

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK - LEIDEN -

Feldmann	T	Biologie végétale marine.
Guinier	T	Physique des solides (Orsay).
Jost	T	Physiologie comparée.
Fortet	T	Calcul des probabilités et physique mathématique.
Schwartz.....	T	Calcul différentiel et intégral.
Chouard	T	Physiologie végétale.
Malavard	T	Aviation (Tech. Aéronaut.).
Brelot	T	Calcul différentiel et intégral.
Normant	T	Synthèse organique.
Benard	T	Chimie minérale.
Buvat.....	T	Botanique (E.N.S.).
Dugué	T	Statistiques mathémat.
Soulairac	T	Psychophysiologie.
Ulrich	T	Physiologie végétale appliquée.
Maréchal	T	Optique théorique et appliquée.
Kirrmann	T	Théories chimiques.
Chadefaud	T	Botanique.
Mlle Le Breton.	T	Physiologie de la nutrition.
Lelong.....	T	Application de l'analyse à la géométrie.
Devillers	T	Anatomie et histologie comparées.
Ehresmann	T	Topologie algébrique.
Francon	T	Physique (S.P.C.N.).
Glangeaud	T	Géographie physique et géologie.
Godement	T	Mathématiques (M.G.P.).
Pisot.....	T	Techniques mathématiques de la physique.
Roch.....	T	Géologie.
Schatzmann ...	T	Astrophysique.
Termier.....	T	Géologie générale.
Zamansky	T	Mathématiques générales.
Lennuier.....	T	Physique (M.G.P.).
Rizet	T	Génétique (Orsay).
Routhier.....	T	Géologie appliquée.
Mme Tonnelat.	T	Physique théorique.
Dixmier.....	T	Mathématiques (M.P.C.).
Souchay.....	T	Chimie générale.
Aigrain	T	Électrotechnique générale.
Brusset.....	T	Chimie systématique.
M. Lévy.....	T	Physique théorique des hautes énergies (Orsay).
Mme Chaix	T	Chimie biologique.
Mme Hurel-Py.	T	Biologie végétale (P.C.B.).
Piaux	T	Chimie (M.P.C.).
Brun.....	T	Mécanique théorique des fluides.
Lederer	T	Chimie biologique (Orsay).
Mme Dubreil ..	T	Mathématiques (Agrég.).
Mme Lelong ...	T	Mathématiques II (E.N.S.).
Bellair	T	Géologie (S.P.C.N.).
Cotte	T	Physique électricité.
J. E. Dubois ...	T	Chimie organique.
Lamotte.....	T	Zoologie (E.N.S.).
A. Michel	T	Chimie minérale (Orsay).
Olmer.....	T	Énergétique générale.
Rouault	T	Électricité (Orsay).
Gauthier.....	T	Mécanique appliquée.
Barchewitz ...	T	Chimie Physique.
Brossel	T	Physique atomique.
Buser.....	T	Physiologie comparée.
Camus.....	T	Physiologie végétale (Orsay).
Castaing	T	Physique II Thermo. (Orsay).
Curien	T	Minéralogie et Cristallographie.
Moyse.....	T	Physiologie végétale (Orsay).
Noirot	T	Évolution des êtres organisés.
Pannetier.....	T	Chimie générale.
Possompes	T	Zoologie.
Pullmann	T	Chimie quantique.
Teillac	T	Physique nucléaire et Radioactivité (Orsay).
Tonnelat	T	Biologie physico-chim. (Orsay).
Ville	T	Économétrie.
Willemart	T	Chimie (P.C.B.).
Dode.....	T	Chimie (Orsay).
Freymann	T	Recherches physiques.
Guinochet.....	T	Biol. végét. (S.P.C.N.) (Orsay).
Rollet.....	T	Chimie minérale.
Mlle Josien	T	Chimie (S.P.C.N.).
Chevalley	T	Géométrie algébrique et théorie des groupes.
Arnoult	T	Électronique (Orsay).
Chapelle.....	T	Physique I (Orsay).
Delange	T	Mathématiques I (Orsay).
Deny	T	Mathématiques générales (Orsay).
Germain.....	T	Mécanique théorique des fluides.
G. Lucas	T	Géologie.
Allard.....	T	Chimie physique.
Berthelot	T	Physique des particules fondamentales (Orsay).

Bicard	T	Météorologie et physique de l'atmosphère.
Mme Albe-Fessard.	T	Psychophysiol.
Friedel	T	Physique des solides (Orsay).
M. Julia	T	Études des moléculaires complexes.
Lender	T	Biol. animale (S.P.C.N.) (Orsay).
Magat	T	Physicochimie des radioéléments.
Mlle Quintin	T	Électrochimie.
Monod	T	Chimie du métabolisme.
Benoit	T	Physiol. anim. (Orsay).
De Possel	T	Analyse numérique.
Charlot	T	Chimie analytique.
Lemée	T	Écologie végétale (Orsay).
Guérin	T	Chimie (M.P.C.) (Orsay).
Chatelet M.	T	Chimie (P.C.B.).
Jean	T	Physique nucléaire (Orsay).
Mattler	T	Physique (S.P.C.N.).
Bergerard	T	Zoologie (Orsay).
Bertein	T	Électronique (Orsay).
Bouissières	T	Radiochimie.
Mme Couture	T	Thermodynamique et mécanique physique.
Ellenberger	T	Géologie des grandes régions du globe.
Franc	T	Biologie animale (P.C.B.).
Schnell		Botanique tropicale.
Stolkowski	T	Physiologie végétale.
Acher	T	Chimie biologique.
Baudoin		Biologie animale (P.C.B.).
Beaumont		Biologie animale (S.P.C.N.).
Blamont	T	Géophysique-ionosphère.
Bourreau	T	Botanique.
D. Curie		Physique (M.G.P.).
Durand-Delga.	T	Géologie.
Freon	T	Chimie organique (Orsay).
Heller	T	Physiol. végétale.
Tortrat	T	Calcul des probabilités.
Cailleux	T	Géologie (S.P.C.N.).
Magnan	T	Physique (S.P.C.N.).
Daudel	T	Mécanique ondulatoire appliquée à la chimie théorique et à la physique nucléaire.
Mlle Fourcroy.		Biologie végétale (S.P.C.N.).
Mme Choquet Bruhat.	T	Mécanique analytique et mécanique céleste.
Mlle Veil	T	Physiologie générale.
Lwoff	T	Microbiologie.
Siestrunck	T	Mécanique physique et expérimentale.
Lacombe	T	Métallurgie des métaux nucléaires (Orsay).
Brochard	T	Physique (P.C.B.) (Orsay).
Cabannes	T	Mécanique générale.
Lesieur	T	Mathématiques I (Orsay).
Mazet	T	Mécanique générale (Orsay).
Caire		Géographie physique et géologique dynamique.
Comolet	T	Mécanique des fluides.
Corabœuf	T	Physiologie animale (Orsay).
Delloue		Physique de l'exosphère.
Gorenflot		Botanique II (Orsay).
Houillon		Biologie animale (P.C.B.).
Jullien J.		Chimie (S.P.C.N.) (Orsay).
Malgrange	T	Techn. math. de la phys. (Orsay).
Olivier		Anthropologie.
Nozeran	T	Botanique II (Orsay).
Blanc-Lapierre.	T	Phys. (E.N.S.) (Orsay).
Chevaugeon	T	Botanique (Orsay).
Kahane	T	Mathématiques (Orsay).
Samuel	T	Math. E.N.S. féminines.
Kourganoff	T	Astronomie (Orsay).
Thiry	T	Mécanique céleste.
Abeles		Physique (S.P.C.N.).
Amat	T	Physique (P.C.B.).
Auboin	T	Géologie.
Mme Benoit-Gueutal.	T	Physique nucléaire et radioactivité (Orsay).
Bougis		Biologie marine (Villefranche-sur-Mer).
Bruhat	T	Mathématiques (M.P.C.).
Brunn	T	Géologie historique (Orsay).
Chabbal	T	Physique (M.G.P.) (Orsay).
Deheuvels	T	Mathématique propédeutique.
D'Espagnat	T	Physique théorique (Orsay).
Furon	T	Géologie (S.P.C.N.).
Mme Gans	T	Génétique.
Geneves		Biologie végétale (P.C.B.).
Guilbert		Physique (C.U.S.) (Orléans).
Hupe	T	Pétrographie.

Hollande	T	Biologie générale.
Lions	T	Analyse numérique.
Maitte	T	Chimie (P.C.B.).
Meyer		Physique propédeutique.
Nicolas		Géologie appliquée.
Panigel		Biologie générale.
Ravier		Pétrographie.
Roseau	T	Mécanique théorique des fluides.
Roubine	T	Électronique.
Silber	T	Chimie (P.C.B.).
Uebersfeld ...	T	Électronique.
Yvon	T	Théories physiques.
Hervé	T	Mathématiques.
Neron	T	Mathématiques (M.P.C.) (Orsay).
Mme Pecker-Wimel.	T	Astrophysique.
Balkansky		Physique (M.P.C.).
Le Corre	T	Électricité.
Delcroix	T	Physique théorique (Orsay).
Gourdin	T	Phys. théor. des hautes énergies (Orsay).
Lehmann	T	Phys. exp. des hautes énergies (Orsay).
Nataf	T	Physique nucléaire et radioactivité (Orsay)
Echalier		Biologie animale (P.C.B.).
Barraud		Physiologie cellulaire.
Lioret		Physiologie végétale (Orsay).
Dars		Géologie structurale et Géologie appliquée.
Camefort	T	Botanique (agrégation).
Vichniewsky ..	T	Mécanique industrielle.
Blaquière		Électronique (Orsay).
Arnous	T	Physique théorique.
Tatibouet		Chimie (C.S.U.) (Orléans).
Malliavin	T	Mathématique propédeutique (Orsay).
Gaudemar		Chimie propédeutique
Perez y Jorba.		Phys. exp. des hautes énergies (Orsay).
David	T	Chimie (Agrég.) (Orsay).
Brousse	T	Mécanique théorique.

Secrétaire Général ..... R. Poullain

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544306_0002

Ann. Inst. Henri Poincaré,
Vol. II, n° 3, 1965, p. 171-260.

Section A :
Physique théorique.

Étude de l'équation de transport dans un liquide de Fermi impur

par

Odile BETBEDER-MATIBET
(Laboratoire de Physique de l'École Normale Supérieure, Paris).

RÉSUMÉ. — L'équation de transport des quasi-particules avancée par Landau est démontrée dans le cas où les particules du système subissent des collisions avec des impuretés statiques. Cette équation donne la réponse linéaire du système à une excitation périodique d'échelle macroscopique, à température nulle, lorsque le temps de collision τ est tel que $\hbar/\tau \ll E_f$. On utilise le formalisme des fonctions de Green : l'influence des processus dissipatifs sur les singularités des divers propagateurs est analysée en détail. Dans l'équation de transport, l'effet des impuretés se traduit par la présence d'une intégrale de collision qui a la forme habituelle. Le calcul explicite de la fonction de distribution, dans un cas particulier, éclaire les conditions de validité de cette équation de transport.

ABSTRACT. — We derive Landau's equation for quasiparticles in a Fermi liquid in the presence of static impurities. This equation provides the linear response of the system to a periodic excitation, acting on a macroscopic scale, at zero temperature, the collision time τ being such that $\hbar/\tau \ll E_f$. Calculations are performed in the framework of Green's function perturbation theory. The effect of collisions on the singularities of propagators is investigated. In the transport equation they lead to a collision integral of the usual form. A calculation of the distribution function, in a simple case, sheds some light on the validity of the transport equation.

INTRODUCTION

Pour étudier les propriétés de transport d'un gaz ou d'un liquide, on cherche souvent à construire, puis à résoudre une « équation de transport » satisfaite par la fonction de distribution des particules du système. Par exemple, le comportement d'un gaz *classique* de particules libres est régi par l'équation de Boltzmann. Lorsque les particules forment un « liquide quantique » (par exemple les électrons d'un métal à basse température), l'équation de transport devient délicate à établir, car il faut tenir compte d'une part, des effets *quantiques*, d'autre part, de l'*interaction* entre les particules.

De nombreux auteurs se sont intéressés au problème de l'équation de transport pour un système quantique de Fermions libres, diffusés par exemple par des *impuretés*. Peierls le premier, en 1934, utilise une méthode de perturbation pour calculer l'intégrale de collision [*8*]. Plus tard, Kohn et Luttinger [*10*], parallèlement Greenwood [*11*] dérivent l'équation de transport à partir de l'équation de mouvement de la matrice densité. Ces méthodes se généralisent mal à des systèmes de particules en interaction.

Par ailleurs, en s'appuyant sur sa théorie semi-phénoménologique des liquides de Fermi (systèmes de fermions *en interaction*) Landau [*4*] propose une équation de transport des quasi-particules, valable *à température nulle*, et pour des perturbations *macroscopiques* (de vecteur d'onde q très inférieur au vecteur d'onde de Fermi k_f, de fréquence ε très inférieure à l'énergie de Fermi E_f). Cette équation a été démontrée par Luttinger et Nozières [*16*] dans le cas où il n'y a pas d'effets dissipatifs (c'est-à-dire *pas de collisions*). Nous nous proposons de généraliser cette démonstration au cas où les particules subissent des collisions sur des impuretés. Dans un métal à température nulle, ces collisions dominent le comportement des électrons; il est donc essentiel de pouvoir les inclure dans une description microscopique des phénomènes de transport. Le formalisme de la théorie des champs utilisé par Luttinger et Nozières se prête parfaitement à une telle généralisation. (Ce même formalisme a d'ailleurs été utilisé par Langer [*17*] pour calculer directement certains coefficients de transport).

Nous commençons par un bref rappel de la théorie de Landau pour un liquide de Fermi (chapitre I^{er}) : notion de « quasi-particule », équation de transport des quasi-particules en l'absence de collisions. Au chapitre II nous montrons comment introduire, toujours de manière semi-phénoméno-

logique, l'effet des collisions. Nous calculons ensuite à partir de l'équation de transport les coefficients de diffusion, la conductivité, etc., soulignant ainsi la grande importance pratique d'une telle équation de transport.

Le chapitre III est consacré aux systèmes de Fermions sans interaction. En nous fondant sur les résultats de Peierls et de Kohn et Luttinger, nous discutons en détail les conditions de validité de l'équation de transport.

Au chapitre IV nous revoyons rapidement le formalisme des fonctions de Green. Nous rappelons en particulier comment la réponse du système à une perturbation extérieure s'exprime en fonction des « opérateurs de couplage » et des « fonctions de corrélation ». Nous représentons par des diagrammes, les termes du développement de perturbation de toutes ces quantités.

A partir du chapitre V, nous supposons réalisées les conditions suivantes :

— Le système est soumis à une perturbation extérieure d'échelle macroscopique ($q \ll k_f$, $\varepsilon \ll E_f$).

— Le temps de collision τ est tel que :

$$\hbar/\tau \ll E_f.$$

Nous calculons les limites correspondantes des opérateurs de couplage et fonctions de corrélation.

L'équation de transport est démontrée au chapitre VI, une fois définie, la fonction de distribution des quasi-particules. Nous vérifions les résultats de Landau et, dans le cas où il n'y a pas d'interaction, ceux de Kohn et Luttinger.

Nous terminons en examinant au chapitre VII les conditions de validité de cette équation et les généralisations possibles.

L'objectif principal de ce travail est double :

— démontrer l'équation de transport de Landau, validant du même coup tous les résultats qu'on peut en tirer (esquissés au chapitre II);

— analyser l'influence des processus dissipatifs sur les singularités des divers propagateurs. La connaissance de ces singularités est essentielle pour pouvoir appliquer à bon escient une méthode de perturbation.

Au cours de ces calculs nous obtiendrons certains résultats explicites (forme de la fonction de distribution, etc.) qui éclairent les conditions de validité de l'équation de transport.

CHAPITRE PREMIER

LA NOTION DE QUASI-PARTICULE DANS UN SYSTÈME PUR. THÉORIE DE LANDAU

I. — Notion de quasi-particule.

Nous dirons qu'un système de fermions en interaction est « normal », si on peut en établissant « adiabatiquement » l'interaction, transformer progressivement un état propre du système idéal (sans interaction) en un état propre du système réel.

Si on part d'un état excité du gaz idéal contenant une particule de vecteur d'onde k ($k > k_f$), on engendre un état excité du système réel : nous dirons que nous avons ajouté une « quasi-particule » de vecteur d'onde k à l'état de base du système réel. On définit de la même manière un « quasi-trou » (dans le cas $k < k_f$). En général la durée de vie des états ainsi définis n'est longue qu'au voisinage de la surface de Fermi : la notion de quasi-particule n'a de sens que dans cette région.

Soit $n(k)$ la fonction de distribution des quasi-particules. L'état de base du système correspond à une distribution $n_0(k)$ isotrope :

$$n_0(k) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k < k_f \\ 0 & \text{si} \quad k > k_f \end{cases} \tag{1.1}$$

L'excitation du système est mesurée par :

$$\delta n(k) = n(k) - n_0(k). \tag{1.2}$$

Énergie du système. — L'énergie du système est une fonctionnelle de $n(k)$. Supposons qu'on modifie $n_0(k)$ d'une quantité $\delta n(k)$: la variation d'énergie δE peut être développée en puissance de $\delta n(k)$:

$$\delta E = \sum_k \varepsilon_k \delta n(k) + \frac{1}{2} \sum_{k,k'} f(k, k') \delta n(k) \delta n(k') + \ldots \tag{1.3}$$

Le terme du deuxième ordre décrit l'interaction entre les quasi-particules : il modifie considérablement un certain nombre de propriétés physiques du système et constitue l'apport le plus important de la théorie de Landau.

Soulignons cependant que (1.3) n'est valable que dans la mesure où le pourcentage des quasi-particules excitées est faible, c'est-à-dire si :

$$\sum_k \delta n(k) \ll \mathrm{N},$$

où N est le nombre total de particules.

ε_k représente l'énergie d'une quasi-particule lorsqu'elle est *seule excitée*. Pour $k = k_f$, ε_k est égal au potentiel chimique μ. La quantité $v_k = \nabla_k \varepsilon_k$ est la vitesse de la quasi-particule. Au voisinage de la surface de Fermi, on peut définir une *masse effective* m^* par la relation :

$$v_k = \frac{k}{m^*} \qquad (\hbar = 1). \tag{1.4}$$

Remarque. — Nous n'avons pas jusqu'à présent introduit explicitement d'indice de spin. En fait, une quasi-particule est caractérisée par son vecteur d'onde k et son spin $\sigma = \pm 1/2$. Les quantités ε_k, $f(k, k')$, $\delta n(k)$ peuvent dépendre de σ ou σ'. Pour un système *isotrope* ε_k ne dépend pas de σ et $f(k, k')$ ne dépend que de l'orientation relative des spins σ et σ'. On peut alors poser :

$$f(k, \sigma; k', \pm\sigma) = f^s(k, k') \pm f^a(k, k'). \tag{1.5}$$

Sur la surface de Fermi (c'est-à-dire pour $\varepsilon_k = \varepsilon_{k'} = \mu$), f^s et f^a ne dépendent que de l'angle ξ entre k et k'. On peut les développer en polynômes de Legendre :

$$f^{s,a}(k, k') = \sum_{l=0}^{\infty} f_l^{s,a} \mathrm{P}\ (\cos \xi). \tag{1.6}$$

II. — Équilibre local des quasi-particules. Surface de Fermi locale. Applications.

Supposons maintenant qu'on ajoute une quasi-particule k au système comprenant déjà une certaine distribution de quasi-particules $\delta n(k')$. La variation d'énergie correspondante vaut d'après (1.3) :

$$\tilde{\varepsilon}_k = \varepsilon_k + \sum_{k'} f(k, k') \delta n(k'), \tag{1.7}$$

$f(k, k')$ caractérise donc la variation de $\tilde{\varepsilon}_k$ avec la fonction de distribution $n(k')$.

La distribution $n_0(k)$ définie par (1.1) correspond à l'équilibre pour des quasi-particules dans l'état de base, ayant donc une énergie ε_k; on peut l'écrire sous la forme :

$$n_0(k) = \theta(\mu - \varepsilon_k) \qquad \text{où} \qquad \theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \tag{1.8}$$

Si on considère au contraire un état excité, caractérisé par une fonction de distribution $\delta n(k)$, l'énergie de la quasi-particule k devient $\tilde{\varepsilon}_k$; on peut définir une distribution d'équilibre « local » $\bar{n}_0(k)$ telle que :

$$\bar{n}_0(k) = \theta(\mu - \tilde{\varepsilon}_k). \tag{1.9}$$

Naturellement l'équilibre réel du système correspond à la fonction de distribution $n_0(k)$. La notion d'équilibre local n'intervient que lorsque le système est soumis à une force extérieure qui induit une déformation $\delta n(k)$.

Au lieu de prendre $n_0(k)$ comme distribution de référence, on peut prendre $\overline{n_0(k)}$ et écrire :

$$n(k) = \overline{n_0(k)} + \overline{\delta n}(k). \tag{1.10}$$

Les quantités $\delta n(k)$ et $\overline{\delta n}(k)$ sont du même ordre et reliées par l'équation suivante :

$$\overline{\delta n}(k) = \delta n(k) - \frac{\partial n_0(k)}{\partial \varepsilon_k} \sum_{k'} f(k, k') \delta n(k') \tag{1.11}$$

qui peut aussi s'écrire sous la forme :

$$\delta n(k) = \overline{\delta n}(k) + \frac{\partial n_0(k)}{\partial \varepsilon_k} \sum_{k'} \bar{f}(k, k') \overline{\delta n}(k') \tag{1.12}$$

$f(k, k')$ et $\bar{f}(k, k')$ sont liés par la relation :

$$f(k, k') = \bar{f}(k, k') - \sum_{k''} f(k, k'') \bar{f}(k'', k') \frac{\partial n_0(k'')}{\partial \varepsilon_{k''}}. \tag{1.13}$$

Distribution d'équilibre des quasi-particules à température finie. — La probabilité de présence $n_0(k, T, \mu)$ d'une quasi-particule d'énergie locale $\tilde{\varepsilon}_k$, pour un système de potentiel chimique μ, à la température T, est égale à :

$$n_0(k, T, \mu) = \left(1 + \exp \frac{\tilde{\varepsilon}_k - \mu}{kT}\right)^{-1} \tag{1.14}$$

où $\tilde{\varepsilon}_k$ est donné par (1.7) avec $\delta n(k) = n_0(k, T, \mu) - n_0(k)$.

A basse température, l'énergie d'interaction entre les quasi-particules excitées est d'ordre T^2 et est donc négligeable par rapport à $(\varepsilon_k - \mu)$ qui est d'ordre T. Dans la limite des basses températures on peut donc remplacer dans (1.14) $\tilde{\varepsilon}_k$ par ε_k.

Propriétés macroscopiques. — On peut appliquer la théorie de Landau à l'étude de nombreuses propriétés macroscopiques, caractéristiques du système en équilibre à température nulle. On trouve les résultats suivants :

— pour la *compressibilité* K :

$$K = \frac{1}{N\rho} \left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)_\Omega = \frac{1}{N\rho} \frac{\nu(0)}{(1 + F_0^s)} \tag{1.15}$$

où :

Ω est le volume du système,

$\rho = \dfrac{N}{\Omega}$ est la densité de particules,

$\nu(0) = \dfrac{\Omega m^* k_f}{\pi^2}$ est la densité d'état à la surface de Fermi,

$F_0^s = \nu(0) f_0^s$.

On en déduit la *vitesse du son s* :

$$s = \left[\frac{k_f^2}{3\, m\, m^*}(1 + F_0^s)\right]^{1/2}; \tag{1.16}$$

— pour la *susceptibilité de spin* χ :

$$\chi = \frac{m^* k_f}{4\pi^2} \left(\frac{e}{mc}\right)^2 \frac{1}{1 + F_0^a} \tag{1.17}$$

où :

$$F_0^a = \nu(0) f_0^a;$$

— pour la *chaleur spécifique* C_v:

$$C_v = \frac{m^* k_f}{3} k^2 T \tag{1.18}$$

où k est la constante de Boltzmann.

III. — Propriétés de transport des quasi-particules (forces à courte portée)

1° Les distributions de quasi-particules non uniformes. — Considérons un état d'excitation inhomogène, dans lequel les propriétés du système varient d'un point à l'autre. Nous nous limitons aux déformations d'échelle *macroscopique*, pour lesquelles l'état reste homogène sur une distance microscopique de l'ordre de la distance moyenne entre les particules. Dans ce cas on peut définir une fonction de distribution locale $\delta n(k, r, t)$. *A priori* une telle description semble violer le principe d'incertitude : on ne peut connaître à la fois la quantité de mouvement k d'une particule et sa position r, ou bien son énergie ε_k et le temps t. Cette difficulté disparaît si on se restreint aux déformations d'échelle macroscopique telles que nous venons de les définir.

Supposons le système soumis à une perturbation extérieure périodique, de fréquence ε et de vecteur d'onde q. Le principe d'incertitude donne une incertitude q sur la quantité de mouvement k et une incertitude ε sur l'énergie ε_k. A température T, $n(k, q, \varepsilon)$ aura donc un sens si :

$$\begin{cases} q v_f \ll kT \\ \varepsilon \ll kT. \end{cases} \tag{1.19}$$

Nous sommes alors en régime classique, au moins en ce qui concerne le principe d'incertitude.

Les conditions (1.19) sont très restrictives. En fait, la théorie de Landau s'applique dans un intervalle plus étendu, tel que :

$$\begin{cases} q v_f \ll \mu \\ \varepsilon \ll \mu \end{cases} \tag{1.20}$$

à condition de considérer $\delta n(k, q, \varepsilon)$ comme l'*amplitude de probabilité* de trouver une « paire » formée d'une quasi-particule de quantité de mouvement $k + q/2$ et d'un quasi-trou de quantité de mouvement $k - q/2$. Ceci ne viole plus le principe d'incertitude puisque la quantité de mouvement

n'est pas exactement k, et est équivalent à l'approche semi-classique de Wigner en mécanique statistique.

La théorie de Landau s'applique donc exclusivement à des perturbations macroscopiques dont l'échelle est grande comparée à l'échelle atomique. Les résultats de Landau représentent le terme principal d'un développement en puissance de q/k_f et de ε/μ.

Considérons un état caractérisé par une fonction de distribution :

$$n(k, r, t) = n_0(k) + \delta n(k, r, t) \tag{1.21}$$

telle que $\delta n(k, r, t)$ soit petit, nul en dehors du voisinage de la surface de Fermi et qu'il ne contienne que des fluctuations de grande longueur d'onde.

Par analogie avec (1.3), nous écrivons la variation d'énergie δE correspondant à $\delta n(k, r, t)$ sous la forme :

$$\delta E = \sum_k \int dr \varepsilon(k, r)\delta n(k, r) + \frac{1}{2}\sum_{kk'}\int\int drdr' f(kr, k'r')\delta n(k, r)\delta n(k'r') + \ldots \tag{1.22}$$

Si l'état de base est invariant par translation :

— $\varepsilon(k, r)$ est indépendant de r : $\varepsilon(k, r) = \varepsilon_k$;
— $f(kr, k'r')$ ne dépend que de la distance $(r - r')$.

Dans la mesure où les forces d'interaction entre les quasi-particules sont de *courte portée* (portée à l'échelle atomique), $\delta n(k, r)$ est pratiquement constant sur l'intervalle où l'interaction est importante. On peut donc écrire 1.22) sous la forme suivante :

$$\delta E = \int dr \delta E(r).$$

$$\delta E(r) = \sum_k \varepsilon_k \delta n(k, r) + \frac{1}{2}\sum_{kk'} f(k, k')\delta n(k, r)\delta n(k', r) \tag{1.23}$$

$$f(k, k') = \int dr f(kr, k'r').$$

L'énergie est alors une fonction locale de la distribution $\delta n(k)$.

2° **Équation de transport.** — *a)* Lorsqu'il n'y a *pas de force extérieure.*

D'après (1.23) l'énergie d'excitation locale d'une quasi-particule k est égale à :

$$\tilde{\varepsilon}(k, r) = \varepsilon_k + \sum_{k'} f(k, k')\delta n(k', r). \tag{1.24}$$

Pour décrire les propriétés de transport, Landau considère les quasi-particules comme indépendantes et décrites par l'hamiltonien classique $\tilde{\varepsilon}(k, r)$. Il en déduit l'équation de transport :

$$\frac{\partial}{\partial t} n(k, r, t) + \nabla_r n(k, r, t) . \nabla_k \tilde{\varepsilon}(k, r, t) - \nabla_k n(k, r, t) . \nabla_r \tilde{\varepsilon}(k, r, t) = 0 \quad (1.25)$$

qui régit l'écoulement des quasi-particules dans l'espace des phases, en l'absence de collisions et de force extérieure. Nous pouvons linéariser (1.25) en utilisant (1.21) et (1.22) et en ne gardant que les termes du 1er ordre en δn. Il vient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta n(k, r, t) + \nabla_r \delta n(k, r, t) . v_k - \nabla_k n_0(k) . \sum_{k'} f(k, k') \nabla_r \delta n(k', r, t) = 0. \quad (1.26)$$

Cette équation de transport linéarisée ne fait intervenir que les valeurs de k proches de la surface de Fermi grâce au facteur :

$$\nabla_k n_0(k) = - v_k \delta(\varepsilon_k - \mu).$$

En combinant (1.26) et (1.11), nous obtenons :

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta n(k, r, t) + v_k . \nabla_r \overline{\delta n}(k, r, t) = 0. \quad (1.27)$$

L'équation de transport contient donc la dérivée par rapport au temps de δn et la dérivée spatiale de $\overline{\delta n}$. La diffusion des quasi-particules étant liée à l'énergie locale, il n'est pas étonnant que le terme qui décrit cette diffusion contienne $\overline{\delta n}$.

b) Lorsque le système est soumis à une *force extérieure.*

Il faut ajouter à l'équation (1.25) le terme d'entraînement. Soit $F_k(r, t)$ la force qui s'exerce sur une quasi-particule de vecteur d'onde k : l'équation de transport linéarisée s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta n(k, r, t) + v_k . \nabla_r \overline{\delta n}(k, r, t) - F_k(r, t) . v_k \delta(\varepsilon_k - \mu) = 0. \quad (1.28)$$

En principe on ne connaît que la force exercée sur une particule *nue.* Pour avoir la force F_k exercée sur une quasi-particule, il faut connaître en détail la structure du nuage électronique accompagnant la particule nue. En fait, dans tous les cas physiques, le champ extérieur se couple à une quantité conservée, qui est la même pour la quasi-particule que pour la particule

nue, par exemple la charge ou le spin, et la force F_k est la même que sur la particule nue.

Sous la forme (1.28), l'équation de transport ne rend pas compte de l'effet des collisions entre quasi-particules. Nous verrons dans la section suivante comment les introduire.

3° **Densité de courant.** — Pour trouver le courant J, nous partons de l'équation de continuité :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\delta\rho) + \operatorname{div} \mathrm{J} = 0 \tag{1.29}$$

où δp est la fluctuation de densité, donnée par :

$$\delta\rho = \sum_k \delta n(k, r, t).$$

En partant de l'équation linéarisée (1.27), on montre que :

$$\mathrm{J} = \sum_k v_k \overline{\delta n}(k). \tag{1.30}$$

A l'aide de (1.11), on peut exprimer J en fonction de δn; il vient :

$$\mathrm{J} = \sum_k j_k \delta n(k) \tag{1.31}$$

où :

$$j_k = v_k - \sum_{k'} f(k, k') v_{k'} \frac{\partial n_0(k')}{\partial \varepsilon_{k'}} \tag{1.32}$$

représente le courant transporté par la quasi-particule k.

Pour un système *invariant par translation*, le courant est le même qu'en l'absence d'interaction et on a :

$$j_k = \frac{k}{m}. \tag{1.33}$$

En comparant (1.32) et (1.33), on obtient la relation :

$$\frac{k}{m} = v_k - \sum_{k'} f(k, k') v_{k'} \frac{\partial n_0(k')}{\partial \varepsilon_{k'}} \tag{1.34}$$

qui, pour un système isotrope, s'écrit :

$$\frac{m^*}{m} = 1 + \frac{\mathrm{F}_1^s}{3} \qquad \mathrm{F}_1^s = \nu(0) f_1^s. \tag{1.35}$$

IV. — Cas d'un gaz chargé : Équation de Landau-Silin

Dans la dérivation de l'équation de transport (section III), nous nous sommes limités au cas où l'interaction entre les quasi-particules a une courte portée. Ceci exclut le cas d'un gaz chargé (gaz d'électrons par exemple), soumis à l'interaction de Coulomb dont la portée est infinie. Pour un tel système l'expression de δE donnée par (1.23) diverge. Silin [5] a montré que l'on peut éviter cette difficulté en introduisant de façon « auto-cohérente » l'effet d'écran. Une expression de la forme (1.23) a un sens si $f(k, k')$ réfère à l'interaction entre des quasi-particules écrantées.

Pour tenir compte *ab initio* de la présence d'un nuage d'écran, on utilise le procédé suivant :

1° On considère d'abord l'interaction entre les distributions de charge *moyennes* des quasi-particules excitées : la fluctuation de densité moyenne est donnée par :

$$\langle \rho(r, t) \rangle = \sum_k \delta n(k, r, t). \tag{1.36}$$

Elle induit un champ électrostatique de charge d'espace $E_P(r, t)$ tel que :

$$\operatorname{div} E_P(r, t) = 4\pi e \sum_k \delta n(k, r, t). \tag{1.37}$$

Pour tenir compte de cette première partie de l'interaction dans l'équation de transport, il suffit de considérer $E_P(r, t)$ comme un champ « extérieur » qui sert à *écranter* le champ produit par une quasi-particule donnée.

2° Une fois introduit le champ $E_P(r, t)$, l'interaction entre deux quasi-particules données est écrantée. Nous sommes donc ramenés à l'étude d'un système de quasi-particules dont l'interaction est à *courte portée*, qu'on peut traiter « à la Landau » en introduisant une énergie d'interaction $f(k\ k')$.

En l'absence d'un champ extérieur, et si on néglige les collisions, l'équation de transport linéarisée (1.27) devient pour un gaz chargé :

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta n(k, r, t) + \nabla_r \overline{\delta n}(k, r, t) . v_k - e E_P(r, t) . \nabla_k n_0(k) = 0 \tag{1.38}$$

où $E_P(r, t)$ est donné par (1.37).

CHAPITRE II

ÉQUATION DE TRANSPORT EN PRÉSENCE D'IMPURETÉS. APPLICATIONS

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié les propriétés d'un liquide de Fermi pur. Nous nous intéressons maintenant au cas où les particules du système sont soumises à l'influence d'*impuretés statiques*. La différence essentielle avec le cas des systèmes purs est la présence, dans l'équation de transport, d'une « intégrale de collision » dont l'effet n'est pas négligeable à température nulle.

I. — Structure de l'intégrale de collision. Équation de transport

Si les collisions sont *élastiques* et *conservent le spin*, on peut écrire l'intégrale de collision sous la forme :

$$I(n) = \left[\frac{dn(k)}{dt}\right]_{coll}$$
$$= -2\pi \sum_{k'} U(k, k')\delta(\tilde{\varepsilon}_k - \tilde{\varepsilon}_{k'})[n(k)(1 - n(k')) - n(k')(1 - n(k))]. \quad (2.1)$$

Dans cette expression le facteur :

$$2\pi U(k, k')\delta(\tilde{\varepsilon}_k - \tilde{\varepsilon}_{k'})$$

est la probabilité de transition d'une quasi-particule de l'état k à l'état k'. Notons que la conservation de l'énergie fait intervenir l'énergie *locale* $\tilde{\varepsilon}_k$ et non pas l'énergie à l'équilibre ε_k : une transition réelle doit, en effet, conserver l'énergie totale, qui inclut l'énergie d'interaction avec les autres quasi-particules. Le dernier facteur de (2.1) assure que l'état initial est occupé et l'état final libre (principe d'exclusion).

$U(k, k')$ est égal au carré du module de l'amplitude de diffusion. Si les impuretés sont distribuées au hasard, $U(k, k')$ ne dépend pas de la position r. Pour des impuretés très diluées, $U(k, k')$ est certainement proportionnel à

la densité d'impuretés (tant que la durée d'une collision est négligeable vis-à-vis de l'intervalle de temps qui sépare deux collisions consécutives). La description théorique des collisions ne rentre pas dans le cadre de la théorie de Landau, et dans ce chapitre nous considérerons $U(k, k')$ comme un paramètre *phénoménologique.*

On peut transformer l'expression (2.1) en utilisant (1.10). La contribution de $\overline{n_0}(k)$ disparaît à cause de la conservation de l'énergie, il reste la contribution de $\overline{\delta n}$ qui, au premier ordre, vaut :

$$I(n) = -2\pi \sum_{k'} U(k, k')\delta(\varepsilon_k - \varepsilon_{k'})(\overline{\delta n}(k) - \overline{\delta n}(k')). \tag{2.2}$$

On voit que l'intégrale de collision s'exprime de façon très simple en fonction de $\overline{\delta n}$: ceci est une conséquence directe de la conservation de l'énergie *locale.*

Pour ce qui suit, nous pouvons poser :

$$\overline{\delta n}(k) = h(\varepsilon_k)g(\theta, \varphi) \tag{2.3}$$

où θ et φ sont les angles polaires qui définissent la direction de k. En reportant (2.3) dans (2.2), on obtient :

$$I(n) = -2\pi h(\varepsilon_k) \sum_{k'} U(k, k')\delta(\varepsilon_k - \varepsilon_{k'})(g(\theta, \varphi) - g(\theta', \varphi')). \tag{2.4}$$

Pour un système *isotrope*, $U(k, k')$ ne dépend que de l'angle ξ entre k et k'. Nous pouvons alors effectuer les développements :

$$U(k, k') = \sum_{l} U_l P_l(\cos \xi)$$

$$\overline{\delta n}(k) = \sum_{lm} \overline{\delta n}_{lm}(\varepsilon_k) Y_{lm}(\theta, \varphi).$$

On en déduit :

$$I(n) = -\sum_{lm} (\overline{\delta n}_{lm}/\tau_l) Y_{lm}(\theta, \varphi) \tag{2.5}$$

où nous avons posé :

$$1/\tau_l = \frac{\Omega}{\pi} \int k'^2 dk' \delta(\varepsilon_k - \varepsilon_{k'})(U_0 - U_l/2l + 1).$$

En fait, ε_k reste toujours très voisin de μ et l'intégration sur k' donne :

$$1/\tau_l = \frac{3\pi N}{m^* v_f^2}(U_0 - U_l/2l + 1). \tag{2.6}$$

On écrit souvent ce résultat sous la forme :

$$1/\tau = 2\pi \sum_{k'} U(k, k')\delta(\varepsilon_k - \varepsilon_{k'})(1 - P_l(\cos \xi)). \tag{2.7}$$

Notons que $1/\tau_0 = 0$: ceci exprime la conservation du nombre de particules dans les collisions. Pour $l = 1$, on reconnaît l'expression habituelle du temps de collision intervenant dans la conductivité.

Pour avoir l'équation de transport du système impur, il suffit d'ajouter $I(n)$ au deuxième membre de (1.28), qui devient :

$$\frac{\partial}{\partial t}\delta n + v_k . \nabla_r \overline{\delta n} - F_k . v_k \delta(\varepsilon_k - \mu) = I(n) = -\sum_{lm} (\overline{\delta n}_{lm}/\tau_l). \tag{2.8}$$

En principe ε_k et $f(k, k')$ peuvent être modifiés par le potentiel des impuretés. Cet effet est négligeable dans la limite des faibles densités d'impuretés.

II. — Applications

a) Conductivité électrique. — Supposons le système soumis à un champ électrique extérieur de la forme :

$$E_{ext}(r, t) = E_{ext} e^{i(qr - \varepsilon t)}.$$

L'équation de transport correspondante s'écrit (voir (2.8)) :

$$-q . v_k \overline{\delta n}(k) + \varepsilon \delta n(k) + ieE . v_k \delta(\varepsilon_k - \mu) = i \sum_{lm} (\overline{\delta n}_{lm}/\tau_l) \tag{2.9}$$

où $E = E_{ext} + E_P$ est le champ électrique total, incluant le champ de charge d'espace. Nous envisagerons successivement deux cas :

1° $0 \ll qv_f\tau \ll 1$. — Ce cas correspond aux conditions dites « normales », dans lesquelles la longueur d'onde du champ appliqué est beaucoup plus grande que le libre parcours moyen des quasi-particules.

(*i*) Considérons d'abord un champ *longitudinal* : dans ce cas $\overline{\delta n}$ a la symétrie $m = 0$. Dans (2.9), on peut négliger le terme de diffusion $(q . v_k \overline{\delta n})$

devant l'intégrale de collision, sauf pour $l=0$ (n'oublions pas que $1/\tau_0=0$). Les seuls termes importants pour δn et $\overline{\delta n}$ sont ceux qui ont la symétrie $l=0$ et $l=1$. Nous n'entrerons pas dans le détail du calcul. On trouve sans difficulté :

$$\overline{\delta n}_{10}=\frac{ie\mathrm{E}\cdot v_k\delta(\varepsilon_k-\mu)}{\dfrac{m}{m^*}\varepsilon+\dfrac{i}{\tau_1}-\dfrac{q^2v_f^2}{3\varepsilon}(1+\mathrm{F}_0^s)}. \tag{2.10}$$

En insérant (2.10) dans (1.30), on trouve pour la conductivité longitudinale :

$$\sigma_{//}(q,\varepsilon)=\frac{ine^2}{m}\left(\frac{1}{\varepsilon+\dfrac{i}{\tau_{\mathrm{eff}}}-\dfrac{s^2q^2}{\varepsilon}}\right) \tag{2.11}$$

où :

$$\tau_{\mathrm{eff}}=\frac{m}{m^*}\tau_1 \tag{2.12}$$

m^* et s sont les quantités respectivement définies par (1.4) et (1.16). $n=k_f^3/3\pi^2$ est la densité électronique. La constante diélectrique du système $\delta(q,\varepsilon)$ qui mesure l'effet d'écran, est donnée par :

$$\delta(q,\varepsilon)=1+\frac{4\pi i\sigma_{//}}{\varepsilon}=1-\frac{4\pi ne^2}{m}\left(\frac{1}{\varepsilon^2+\dfrac{i\varepsilon}{\tau_{\mathrm{eff}}}-s^2q^2}\right). \tag{2.13}$$

Les expressions (2.11) et (2.13) sont riches d'enseignement :

α) Supposons qu'on ait :

$$1\gg(qs\tau_{\mathrm{eff}})^2\gg\varepsilon\tau_{\mathrm{eff}}. \tag{2.14}$$

L'expression (2.13) se réduit à :

$$\delta=1+\frac{q_s^2}{q^2} \tag{2.15}$$

$$q_s^2=\frac{4\pi ne^2}{ms^2}. \tag{2.16}$$

La constante diélectrique *statique* est donc la même qu'en l'absence d'impuretés. La limite (2.14) correspond au *régime de « charge d'espace »* dans lequel les quasi-particules font écran au champ appliqué (mécanisme qui ne dépend pas des collisions).

β) Supposons maintenant qu'on soit dans la limite opposée :

$$\varepsilon\tau_{\text{eff}} \gg (qs\tau_{\text{eff}})^2. \tag{2.17}$$

On a dans ce cas :

$$\mathcal{E} = 1 - \frac{4\pi ne^2}{m\varepsilon^2}\frac{1}{1 - i\varepsilon\tau_{\text{eff}}}. \tag{2.18}$$

Cette limite correspond au *régime de « conduction »*.
Pour $\varepsilon\tau_{\text{eff}} \ll 1$, la conductivité (2.11) se réduit à :

$$\sigma_{//} = \frac{ne^2\tau_{\text{eff}}}{m}. \tag{2.19}$$

On retrouve le résultat de Langer [*17*]. Remarquons que l'interaction entre quasi-particules n'intervient pas explicitement dans (2.18) et (2.19). Les résultats s'expriment simplement en fonction du temps de collision τ_{eff}, qui joue le rôle d'un paramètre phénoménologique.

(*ii*) Considérons maintenant un champ *transverse* : dans ce cas il n'y a pas de composante $l = 0$ (c'est-à-dire pas de charge d'espace). Les termes les plus importants sont ceux qui ont la symétrie $l = 1$. On vérifie que :

$$\overline{\delta n}(k) = \frac{iev_k \cdot \mathrm{E}\delta(\varepsilon_k - \mu)}{\frac{m}{m^*}\varepsilon + \frac{i}{\tau_1}} \tag{2.20}$$

ce qui donne pour la conductivité :

$$\sigma_{\perp} = \frac{ne^2\tau_{\text{eff}}}{m}\frac{1}{1 - i\varepsilon\tau_{\text{eff}}}. \tag{2.21}$$

Ici encore, l'interaction entre les quasi-particules n'intervient pas.

2° $qv_f\tau \gg 1$. — Dans cette limite, les collisions sont pratiquement négligeables et on peut ignorer le deuxième membre de (2.9). La conductivité est celle du *système pur*. On sait la calculer, dans des cas limites simples. Nous rappelons les résultats bien connus :

α) Si $1 \ll qv_f\tau \ll \varepsilon\tau$: la conductivité ne dépend pas de la direction de q :

$$\sigma_{//} = \sigma_{\perp} = \frac{ine^2}{m\varepsilon}. \tag{2.22}$$

La constante diélectrique est donnée par :

$$\mathcal{E} = 1 - \frac{4\pi ne^2}{m\varepsilon^2} \tag{2.23}$$

β) Si $\varepsilon \ll qv_f$: il faut distinguer les cas des champs longitudinaux et transverses :

$$\textit{Champ longitudinal} : \mathcal{E} = 1 + \frac{q_s^2}{q^2}.$$

$$\textit{Champ transverse} : \sigma_\perp = \frac{3\pi ne^2}{4k_f q}. \tag{2.24}$$

La conductivité transverse est réelle ou « dissipative » et a même valeur que dans un système sans interaction.

En dehors des cas considérés, la résolution de (2.9) est compliquée. On ne peut avoir que des solutions approchées. Mais l'équation (2.9) elle-même reste valable tant que q et ε ont une échelle *macroscopique*.

b) Coefficients de diffusion. — Supposons le système soumis à un faible gradient de densité ∇N, la température restant partout nulle. Il apparaît un courant de diffusion J donné par :

$$J = - D \nabla N$$

où D est le coefficient de diffusion du système. Nous allons montrer rapidement comment on peut calculer D à partir de l'équation de transport.

Le gradient de densité ∇N donne naissance à un gradient de potentiel chimique :

$$\nabla \mu = \frac{d\mu}{dN} \nabla N.$$

Soit $\mu(r)$ le potentiel au point r. On écrit la fonction de distribution $n(k, r)$ sous la forme :

$$n(k, r) = \bar{n}_0(\mu(r)) + \overline{\delta n}(k, r) \tag{2.25}$$

où :

$$n_0(\mu(r)) = \theta(\mu(r) - \tilde{\varepsilon}_k)$$

$\overline{\delta n}$ est proportionnel à $\nabla \mu$ et représente l'écart à l'isotropie (qui donne naissance au courant de diffusion J).

Introduisons (2.25) dans l'équation de transport (1.25), complétée par l'intégrale de collision. Au premier ordre en $\nabla \mu$ nous avons :

$$\frac{\partial n_0}{\partial \mu} \nabla \mu . \nabla_k \varepsilon_k = - \sum_{lm} (\overline{\delta n}_{lm}/\tau_l) \tag{2.26}$$

$\overline{\delta n}$ a la symétrie $l = 1$; la solution de (2.26) s'écrit donc :

$$\delta \bar{n}(k) = - \tau_1 v_k . \nabla \mu \delta(\varepsilon_k - \mu). \tag{2.27}$$

Le courant correspondant est donné par (1.30); on en déduit :

$$D = \frac{N\tau_1}{m^*}\frac{d\mu}{dN}. \tag{2.28}$$

Utilisons (1.15); il vient :

$$D = \frac{1}{3}v_f^2\tau_1(1 + F_0^s) \tag{2.29}$$

(2.29) ressemble au résultat habituel de théorie cinétique, mis à part le facteur $(1 + F_0^s)$ dû à la variation de vitesse des quasi-particules en fonction de la densité.

On peut aussi relier D à la vitesse du son définie par (1.16) :

$$D = s^2\tau_{eff}. \tag{2.30}$$

On retrouve (2.30) en écrivant que la fréquence à laquelle on passe d'un régime de diffusion au régime de propagation du son ordinaire est égale à la fréquence des collisions $1/\tau_{eff}$.

D est relié à la mobilité μ du système, déduite de (2.19) :

$$\mu = \frac{e\tau_{eff}}{m}. \tag{2.31}$$

En comparant (2.30) et (2.31), on voit que :

$$\frac{D}{\mu} = \frac{ms^2}{e} \tag{2.32}$$

(2.32) constitue une généralisation de la *relation d'Einstein.*

Les résultats précédents se transposent facilement au calcul du coefficient de diffusion de spin D_σ (défini seulement dans le cas où les collisions conservent le spin). On trouve :

$$D_\sigma = \frac{1}{3}v_f^2\tau_1(1 + F_0^a). \tag{2.33}$$

c) Conductivité thermique. — Supposons le système soumis à un gradient de température ∇T, la condition $kT \ll \mu$ étant toujours vérifiée. Pour que la densité reste constante, il faut que le potentiel chimique μ dépende de T et donc de r. Nous écrivons donc $n(k, r)$ sous la forme :

$$n(k, r) = \bar{n}_0(T(r)) + \overline{\delta n}(k, r) \tag{2.34}$$

$$\bar{n}_0(T(r)) = \left(1 + \exp\left(\frac{\tilde{\varepsilon}_k - \mu(r)}{kT(r)}\right)\right)^{-1} \tag{2.35}$$

où $\overline{\delta n}$ est proportionnel à ∇T. Au premier ordre en ∇T, l'équation de transport s'écrit :

$$-\frac{\partial n_0}{\partial \varepsilon_k} v_k . \nabla T \left(\frac{\partial \mu}{\partial T} + \frac{\varepsilon_k - \mu}{T} \right) = - \sum_{lm} (\overline{\delta n}_{lm}/\tau_l). \tag{2.36}$$

A basse température le terme $\dfrac{\partial \mu}{\partial T}$ est d'ordre T et donc négligeable devant $(\varepsilon_k - \mu)/T$ qui est d'ordre zéro. De nouveau, le problème a la symétrie $l = 1$. On a donc :

$$\frac{\overline{\delta n}(k)}{\tau_1} = \frac{\partial \overline{n}_0}{\partial \varepsilon_k} v_k . \nabla T \frac{(\varepsilon_k - \mu)}{T} . \tag{2.37}$$

La quantité physique qui nous intéresse est le flux d'énergie libre Φ, proportionnel au gradient de température :

$$\Phi = - \mathbf{K} \nabla T$$

où $\mathbf{K}$ est la conductivité thermique du système.

Par un argument analogue à celui qui nous a permis d'obtenir l'expression (1.30) pour le courant, on montre que :

$$\Phi = \sum_k \overline{\delta n}(k)(\varepsilon_k - \mu) v_k . \tag{2.38}$$

En comparant (2.37) et (2.38), on obtient :

$$\mathbf{K} = - \frac{\tau_1 v_f^2}{3T} \sum_k \frac{\partial \overline{n}_0}{\partial \varepsilon_k} (\varepsilon_k - \mu)^2 .$$

Remplaçons $\overline{n}_0$ par l'expression (2.35), et soit T la température moyenne du système. Après sommation sur k, il vient :

$$\mathbf{K} = \frac{\pi^2}{3} \frac{n \tau_1}{m^*} k^2 T . \tag{2.39}$$

La conductivité thermique $\mathbf{K}$ est reliée à la conductivité électrique σ, définie par (2.19). On vérifie ainsi la loi de Wiedemann-Franz :

$$\frac{\sigma T}{\mathbf{K}} = \frac{3}{\pi^2} \frac{e^2}{k^2} . \tag{2.40}$$

Le résultat (2.40) a été établi par Langer [*17*], par une méthode de perturbation.

En comparant (1.18) et (2.39), on peut écrire la conductivité thermique sous la forme :

$$\mathrm{K} = \frac{1}{3}\tau_1 v_f^2 \mathrm{C}_v. \tag{2.41}$$

Nous retrouvons le résultat habituel de théorie cinétique. Remarquons qu'il n'y a pas ici de facteur supplémentaire comme dans (2.29) : en effet v_k ne dépend pas de la température (quand on augmente T, le nombre total de particules dans chaque direction de l'espace des k ne change pas).

Conclusion. — Soulignons pour terminer la simplicité de cette théorie « semi-phénoménologique ». Toutes les propriétés de transport peuvent être décrites rigoureusement à l'aide d'un seul paramètre, le temps de collision τ_1. Dans certains cas, le résultat exact s'écarte du modèle élémentaire de Sommerfeld. L'approche de Landau permet une interprétation physique simple de ces corrections.

CHAPITRE III

CONDITIONS DE VALIDITÉ DE L'ÉQUATION DE TRANSPORT DANS LE CAS D'UN GAZ DE FERMIONS SANS INTERACTION

L'équation de transport (2.8) a déjà été établie par divers auteurs, dans le cas d'un système de fermions *indépendants*. Le modèle choisi généralement est celui d'un système d'électrons — dont on néglige l'interaction de Coulomb — soumis au potentiel H' créé par un certain nombre N_i d'impuretés réparties au hasard :

$$\mathrm{H}' = \sum_{l=1}^{\mathrm{N}_l} \mathrm{W}(r - \mathrm{R}_l) \tag{3.1}$$

où R_l désigne la position de la $l^{\text{ème}}$ impureté. La distribution statistique des électrons est caractérisée par une matrice densité ρ, satisfaisant l'équation :

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = [\mathrm{H}, \rho] \tag{3.2}$$

où H est l'hamiltonien total relatif à un électron.

Soit H_0 l'hamiltonien d'un électron libre et $| k \rangle$ les états propres de H_0. Les éléments diagonaux de ρ dans la représentation $| k \rangle$ donnent la probabilité de trouver un électron dans l'état $| k \rangle$, soit $n(k, t)$:

$$n(k, t) = \langle k | \rho(t) | k \rangle = \rho_{kk}(t). \tag{3.3}$$

I. — Calcul de l'intégrale de collision

Avant de démontrer l'équation de transport proprement dite, supposons acquise l'équation de Boltzmann et essayons de calculer à partir de l'équation (3.2) relative au système *isolé* l'intégrale de collision $I(n)$. Le calcul original, fait par Bloch [7], a été repris par Peierls [8].

En l'absence de champ extérieur, l'hamiltonien se réduit à :

$$H = H_0 + H'. \tag{3.4}$$

Les éléments de matrice de ρ dans la représentation $| k \rangle$ satisfont l'équation :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho_{kk'}(t) = (\varepsilon_k - \varepsilon_{k'})\rho_{kk'}(t) + \sum_{k''} (H'_{kk''}\rho_{k''k'}(t) - \rho_{kk''}(t)H'_{k''k'}) \tag{3.5}$$

où ε_k est l'énergie d'un électron libre dans l'état $| k \rangle$.

Supposons ρ diagonal au temps $t = 0$:

$$\rho_{kk'}(0) = n(k, 0)\delta_{kk'}. \tag{3.6}$$

L'effet de H′ sur un *petit* intervalle de temps t peut être évalué par un calcul de perturbation. Au deuxième ordre en H′, on obtient à partir de (3.5) :

$$\frac{\partial n(k, t)}{\partial t} = 2 \sum_{k'} \frac{|H'_{kk'}|^2 \sin [(\varepsilon_k - \varepsilon_{k'})t/\hbar]}{\varepsilon_k - \varepsilon_{k'}} [n(k, 0) - n(k', 0)] \tag{3.7}$$

(3.7) n'est valable que si $t < \tau$, où τ est l'intervalle de temps qui sépare deux collisions.

Pour retrouver la forme habituelle de l'intégrale de collision (2.2), il faut faire à ce stade, deux approximations :

a) Le facteur $\sin [(\varepsilon_k - \varepsilon_{k'})t/\hbar]/(\varepsilon_k - \varepsilon_{k'})$ présente une résonance pour $\varepsilon_k = \varepsilon_{k'}$, de largeur $\hbar/t$. Comme $n(k', 0)$ varie rapidement sur une bande d'énergie de largeur kT, centrée en $\varepsilon_{k'} = \mu$, on ne peut remplacer ce facteur par une fonction $\delta(\varepsilon_k - \varepsilon_{k'})$ que si $\hbar/t \ll$ kT, ce qui suppose :

$$\hbar/\tau \ll \text{kT}. \tag{3.8}$$

b) D'autre part, la solution de (3.5) comporte aussi des éléments non diagonaux $\rho_{kk'}(t)$. Pour pouvoir étendre le calcul précédent à un autre intervalle de temps d'ordre τ, il faut que la condition (3.6) reste vraie à tout instant. Il en est ainsi si on fait *après chaque collision* une moyenne sur les phases. Cette approximation, dite des « phases indépendantes », revient à supposer que les impuretés sont *réparties au hasard* : la moyenne sur les configurations d'impuretés d'un élément non diagonal $\rho_{kk'}(t)$ est alors nulle. Par exemple, au deuxième ordre en H', $\rho_{kk'}(t)$ contient le facteur :

$$H'_{kk''}H'_{k''k'} = \sum_{ij} W_{kk''}W_{k''k'}e^{i(k''-k)R_i}e^{i(k'-k'')R_j} \tag{3.9}$$

dont la moyenne sur R_i et R_j est nulle sauf si $k = k'$. On a donc à tout instant t :

$$\overline{\rho_{kk'}(t)} = n(k, t)\delta_{kk'}. \tag{3.10}$$

Si les conditions a et b sont réalisées, on a quel que soit t :

$$I(n) = \left[\frac{dn(k, t)}{dt}\right]_{coll} = \frac{2\pi}{\hbar}\sum_{k'}\overline{|H'_{kk'}|^2}[n(k't) - n(k, t)]\delta(\varepsilon_k - \varepsilon_{k'}) \tag{3.11}$$

où :

$$\overline{|H'_{kk'}|^2} = N_i|W_{kk'}|^2.$$

On retrouve la forme habituelle de l'intégrale de collision.

La condition (*b*) revient à négliger les corrélations de position entre les différentes impuretés. Elle est en général satisfaite, surtout pour des impuretés diluées. Au contraire la condition (3.8) est très restrictive; par exemple, elle n'est jamais satisfaite dans les métaux à basse température. Pourtant, l'équation (2.8) donne dans ce dernier cas d'excellents résultats pour les coefficients de transport. Il semble donc que la condition de Peierls soit en fait inutile. C'est ce que nous allons maintenant vérifier en établissant directement l'équation de transport et en montrant comment éliminer les termes singuliers d'ordre $\hbar/\tau kT$.

II. — Établissement de l'équation de transport à partir de l'équation de mouvement de la matrice densité

On peut dériver l'équation de transport directement de l'équation (3.2) en incluant dans H l'hamiltonien d'interaction avec le *champ extérieur*. Supposons le système soumis à un champ électrique E dirigé suivant Ox. L'hamiltonien total s'écrit :

$$H = H_0 + H' - eEx. \tag{3.12}$$

Remplaçons dans (3.2) H par l'expression (3.12). Nous obtenons, dans la représentation $| k \rangle$, l'équation :

$$i\frac{\partial}{\partial t}\rho_{kk'}(t) = (\varepsilon_k - \varepsilon_{k'})\rho_{kk'}(t) + \sum_{k''}(H'_{kk''}\rho_{k''k'}(t) - \rho_{kk''}(t)H'_{k''k'}) - ieE\left(\frac{\partial}{\partial k_x} + \frac{\partial}{\partial k'_x}\right)\rho_{kk'}(t) \qquad (\hbar = 1). \quad (3.13)$$

Au premier ordre en E, la matrice densité ρ est de la forme :

$$\rho = \rho^0 + Eg \qquad (3.14)$$

où $\rho^0 = n_0(H_0 + H', T)$ est une fonction de Fermi de l'hamiltonien $(H_0 + H')$. Pour un champ extérieur continu établi adiabatiquement :

$$E = E_0 e^{\eta t} \qquad (\eta \to +0) \qquad (3.15)$$

la perturbation g satisfait les équations :

$$0 = (\varepsilon_k - \varepsilon_{k'} - i\eta)g_{kk'} + \sum_{k''}(H'_{kk''}g_{k''k'} - g_{kk''}H'_{k''k'}) - ie\left(\frac{\partial}{\partial k_x} + \frac{\partial}{\partial k'_x}\right)\rho^0_{kk'} \qquad \text{si } k \neq k' \quad (3.16)$$

$$0 = -i\eta g_{kk} + \sum_{k''}(H'_{kk''}g_{k''k} - g_{kk''}H'_{k''k}) - ie\frac{\partial}{\partial k_x}\rho^0_{kk} \qquad (3.17)$$

On peut résoudre (3.16) et (3.17) par approximations successives [*10*, *11*]. A l'*ordre le plus bas en* H', on obtient, après moyenne sur les configurations d'impuretés :

$$eEv_{k_x}\frac{\partial n_0(\varepsilon_k, T)}{\partial \varepsilon_k} = 2\pi\sum_{k'}U^{(2)}(k, k')[\delta n(k') - \delta n(k)]\delta(\varepsilon_k - \varepsilon_{k'}) \qquad (3.18)$$

où :

$$\delta n(k) = Eg_{kk} = \rho_{kk} - \rho^0_{kk}$$
$$U^{(2)}(k, k') = N_i \mid W_{kk'} \mid^2 \qquad (3.19)$$

(3.18) est l'équation de Boltzmann linéarisée, pour des phénomènes stationnaires.

Lorsqu'on pousse le calcul un cran plus loin, il apparaît de nombreux termes correctifs, que Kohn et Luttinger [*10*] ont essayé de classer et d'identifier :

a) Modification de l'intégrale de collision. — Certains termes modifient la probabilité de transition $U(k, k')$: à l'ordre 4 en W, on a :

$$U(k, k') = N_i \mid t(k, k') \mid^2 + N_i^2 u_{kk'} \qquad (3.20)$$

$t(k, k')$ est la matrice de diffusion d'un électron sur une impureté (dont $W_{kk'}$ représente l'approximation de Born). $u_{kk'}$ est d'ordre W^4 et représente l'effet sur la probabilité de transition des interférences entre les diffusions par *deux* impuretés différentes. On peut montrer [*9*, *13*] que le deuxième terme de (3.20) est d'ordre $\hbar/\tau E_f$ par rapport au premier.

— D'autres termes contribuent à remplacer $\delta(\varepsilon_k - \varepsilon_{k'})$ par une fonction « élargie » et déplacée, centrée en $\xi_k = \xi_{k'}$ et de largeur 2Γ (où ξ_k est l'énergie d'un électron en présence des impuretés et $\Gamma \sim \hbar/\tau$ son amortissement).

— Il existe enfin un dernier terme contribuant à l'intégrale de collision, dont la signification propre n'est pas claire.

b) Modification du terme d'entraînement. — Le premier membre de (3.18) comprend aussi des termes supplémentaires, dus au changement de la distribution à l'équilibre provoquée par les impuretés. Certains de ces termes sont d'ordre $(\Gamma/kT)\partial n_0(\varepsilon_k, T)/\partial\varepsilon_k$ [*11*].

Pour déterminer la condition de validité de l'équation (3.18), nous avons cherché à évaluer l'ordre de grandeur des corrections que nous venons d'énumérer. Les expressions données par Kohn et Luttinger se simplifient beaucoup lorsqu'on néglige la dépendance en ε_k et $\varepsilon_{k'}$ du potentiel $W_{kk'}$ (tout en gardant la dépendance angulaire). ε_k et $\varepsilon_{k'}$ restant toujours voisins de E_f (à une distance d'ordre Γ ou kT), les termes ainsi négligés sont d'ordre Γ/E_f ou kT/E_f ; ils ne changent pas l'ordre de grandeur des résultats.

Si le système est isotrope, $W_{kk'}$ et $U(k, k')$ ne dépendent que de l'angle entre k et k' ; $\delta n(k)$ est alors de la forme :

$$\delta n(k) = v_{k_x}\varphi(\varepsilon_k) \tag{3.21}$$

où v_k est la vitesse de la particule k. A l'ordre le plus bas, (3.18) devient :

$$eE\frac{\partial n_0(\varepsilon_k, T)}{\partial \varepsilon_k} = -2\left(\Gamma^{(2)} - \frac{\Gamma_1^{(2)}}{3}\right)\varphi^{(2)}(\varepsilon_k) \tag{3.22}$$

$$\Gamma^{(2)} = \pi\sum_{k'} U^{(2)}(k, k')\delta(\varepsilon_k - \varepsilon_{k'})$$

$$\frac{\Gamma_1^{(2)}}{3} = \pi\sum_{k'} U^{(2)}(k, k')\delta(\varepsilon_k - \varepsilon_{k'})\cos(k, k'). \tag{3.23}$$

En ajoutant les termes d'ordre W^4, on trouve que $\varphi(\varepsilon_k)$ satisfait l'équation suivante :

$$eE\left[\frac{\partial n_0(\varepsilon_k, T)}{\partial \varepsilon_k} - \frac{\Gamma_1}{3\pi}\int \frac{d\varepsilon_{k'}}{(\varepsilon_k - \varepsilon_{k'} - i\eta)^2}\frac{\partial n_0(\varepsilon_{k'}, T)}{\partial \varepsilon_{k'}}\right]$$
$$= -2\left(\Gamma - \frac{\Gamma_1}{3}\right)\left[\varphi(\varepsilon_k) - \frac{2\Gamma_1}{3\pi}\int \frac{d\varepsilon_{k'}}{(\varepsilon_k - \varepsilon_{k'} - i\eta)^2}\varphi(\varepsilon_{k'})\right] \tag{3.24}$$

où Γ et Γ_1 sont les quantités obtenues en remplaçant $U^{(2)}$ par U dans (3.23). A cet ordre, on peut changer $\varphi(\varepsilon_k)$ en $\varphi^{(2)}(\varepsilon_k)$ dans le dernier terme (3.24). Il vient ainsi :

$$\varepsilon E h(\varepsilon_k) = 2\left(\Gamma - \frac{\Gamma_1}{3}\right)\varphi(\varepsilon_k) \tag{3.25}$$

où nous avons posé :

$$h(\varepsilon_k) = -\frac{\partial n_0(\varepsilon_k, T)}{\partial \varepsilon_k} - \frac{\Gamma_1}{3\pi}\int \frac{d\varepsilon_{k'}}{(\varepsilon_k - \varepsilon_{k'} - i\eta)^2}\frac{\partial n_0(\varepsilon_{k'}, T)}{\partial \varepsilon_{k'}}. \tag{3.26}$$

La distribution de particules est donnée par :

$$\delta n(k) = v_{k_x}\varphi(\varepsilon_k) = h(\varepsilon_k)\nu(\hat{k}) \tag{3.27}$$

où $\nu(\hat{k})$ ne dépend que de la direction de k. D'après (3.23) et (3.25), $\nu(\hat{k})$ satisfait l'équation :

$$eEv_{k_x} = 2\pi \sum_{k'} U(kk')[\nu(\hat{k}) - \nu(\hat{k'})]\delta(\varepsilon_k - \varepsilon_{k'}) \tag{3.28}$$

(3.28) a la structure d'une équation de transport. On vérifie facilement que :

$$\int h(\varepsilon_k)d\varepsilon_k = 1 \tag{3.29}$$

$\nu(\hat{k})$ représente donc la distribution angulaire des particules, *intégrée sur l'énergie* :

$$\nu(\hat{k}) = \int \delta n(k)d\varepsilon_k. \tag{3.30}$$

En pratique, c'est souvent $\nu(\hat{k})$ que l'on mesure expérimentalement, à des corrections d'ordre $\hbar/\tau E_F$ près. Par exemple, la densité de courant est donnée par :

$$j = \sum_k \frac{k}{m}\delta n(k).$$

Sachant que $\delta n(k)$ n'est appréciable qu'au voisinage immédiat de la surface de Fermi, on peut dans l'intégration sur ε_k remplacer $\frac{|k|}{m}$ par $\frac{k_f}{m}$. Il vient :

$$j = \frac{k_f}{m} N_0 \int d\hat{k}\, \frac{k}{|k|}\nu(\hat{k}) \tag{3.31}$$

où N_0 est la densité d'état à la surface de Fermi et $\widehat{dk}$ l'élément d'angle solide. (3.31) permet de calculer la conductivité.

Nous pouvons maintenant exprimer les conditions de validité du résultat (3.27). Le calcul de $\nu(\widehat{k})$ (et des quantités qui en dérivent : courant, etc.) est valable tant que :

$$\frac{\hbar}{\tau E_F} \ll 1. \tag{3.32}$$

La condition (3.32) est beaucoup moins stricte que la condition de Peierls (3.8); elle est largement remplie dans les métaux usuels. Nous justifions ainsi le résultat obtenu par Landau dès 1934 sur la base d'arguments très généraux. La condition (3.32) émerge aussi des calculs directs de la conductivité, ne passant pas par l'intermédiaire d'une équation de transport [*13*, *17*]. Au contraire, la fonction $h(\varepsilon_k)$ contient des termes d'ordre Γ_1/kT lorsque kT est petit et ε_k voisin de μ. L'expression (3.26) n'a donc de sens que si la condition de Peierls (3.8) est satisfaite. En bref, dans le cadre d'un calcul de perturbations, la distribution *angulaire* des particules, $\nu(\widehat{k})$, n'est sensible qu'à la condition (3.32), alors que la distribution *énergétique* $h(\varepsilon_k)$ dépend de la condition beaucoup plus stricte (3.8). Dans la mesure où l'on ignore la distribution en énergie des particules (en intégrant sur ε_k) la condition de Peierls (3.8) n'a plus d'importance.

Pour comprendre qualitativement l'origine des termes singuliers d'ordre Γ_1/kT dans $h(\varepsilon_k)$, considérons la limite $T = 0$: (3.26) s'écrit alors :

$$h(\varepsilon_k) = \delta(\varepsilon_k - \mu) + \frac{\Gamma_1}{3\pi(\varepsilon_k - \mu - i\eta)^2}. \tag{3.33}$$

Les termes d'ordre $\dfrac{\Gamma_1}{kT}$ se réduisent à une *divergence* pour $\varepsilon_k = \mu$. Cette divergence est en fait artificielle. En réalité, la fonction $h(\varepsilon_k)$ est étalée autour de la surface de Fermi sur une largeur d'ordre Γ, par suite de l'*incertitude* $\hbar/\tau$ sur l'énergie des particules. Les termes divergents de (3.33) surgissent lorsqu'on essaie de développer cette distribution *élargie* en puissances de Γ dans un domaine où la série diverge. Par exemple, on pourrait considérer (3.33) comme le début du développement en puissances de $\Gamma_1/(\varepsilon_k - \mu)$ de la fonction de Lorentz :

$$h_L(\varepsilon_k) = \frac{\Gamma_1/3\pi}{(\varepsilon_k - \mu)^2 + \left(\dfrac{\Gamma_1}{3}\right)^2}. \tag{3.34}$$

Ce développement *diverge* lorsque $|(\varepsilon_k - \mu)| < \Gamma_1/\sqrt{3}$: la fonction régulière (3.34) s'est transformée en une somme de termes singuliers. En fait, nous verrons plus loin que la solution correcte $h(\varepsilon_k)$ est plus compliquée que la forme simple (3.34). Néanmoins, l'origine des singularités reste la même : on ne développe pas une fonction en puissances de sa largeur. Ces difficultés n'apparaissent pas pour la distribution angulaire $\nu(\widehat{k})$ qui ne varie que sur une échelle d'ordre k_F : l'incertitude sur k se traduit alors par une erreur d'ordre Γ/E_F.

Les difficultés précédentes sont inévitables dans le cadre d'une méthode de perturbation, où l'on développe par construction en puissances de Γ. On évite cet écueil en intégrant sur l'énergie, c'est-à-dire en ignorant l'élargissement dû au principe d'incertitude. En pratique, il est commode de conserver le concept de $\delta n(k)$ en définissant un $\widetilde{\delta n}(k)$ « modèle », tel que :

$$\widetilde{\delta n}(k) = \nu(\widehat{k})\delta(\varepsilon_k - \mu) \qquad (3.35)$$

étant entendu que la fonction de Dirac ne représente pas l'élargissement physique. (3.35) donne des résultats globaux corrects à l'ordre zéro en $(\hbar/\tau E_f)$. $\widetilde{\delta n}(k)$ satisfait l'équation de transport (3.28) où l'on a ajouté le facteur $\delta(\varepsilon_k - \mu)$ dans le terme d'entraînement.

Les conclusions précédentes sont confirmées par le calcul détaillé de $\delta n(k)$ effectué dans les chapitres suivants (dans le cas plus général d'un liquide de Fermi en interaction). $\delta n(k)$ possède les caractéristiques essentielles indiquées dans ce chapitre (largeur d'ordre Γ, équation de transport, etc.). En l'absence d'interaction, $\delta n(k)$ satisfait l'équation (3.28). En outre, on retrouve les équations de Kohn et Luttinger en développant $\delta n(k)$ en puissances de Γ. Les diverses voies d'approche du problème des équations de transport sont donc équivalentes [1].

CHAPITRE IV

LE FORMALISME

Nous nous proposons d'utiliser un formalisme fondé sur l'usage des « fonctions de Green » du système, décrivant la propagation d'une ou plusieurs particules données. Nous calculerons les fonctions de Green par la

[1] Nos résultats globaux sont naturellement identiques à ceux obtenus par Langer [17] sans passer par l'intermédiaire d'une équation de transport.

méthode habituelle de « perturbation », en faisant un développement en série par rapport à la force d'interaction entre particules. Nous ferons grand usage des techniques diagrammatiques qui permettent d'établir de nombreuses relations avec beaucoup d'élégance.

I. — Hamiltonien du système pur. Fonctions de Green. Diagrammes

Considérons d'abord un système de fermions « pur » et supposons qu'il existe une interaction binaire de potentiel $V(r)$ entre ces fermions. Nous écrivons l'hamiltonien du système à l'aide des opérateurs création (a^+) et destruction (a) des particules :

$$H = H_0 + H_1$$

$$H_0 = \sum_{k\sigma} \frac{k^2}{2m} a^+_{k,\sigma} a_{k,\sigma} \tag{4.1}$$

$$H_1 = \frac{1}{2\Omega} \sum_{\substack{kk'q \\ \sigma\sigma'}} V(q) a^+_{k+q,\sigma} a^+_{k'-q,\sigma'} a_{k',\sigma'} a_{k,\sigma} \tag{4.2}$$

où :

$$V(q) = \int e^{-iqr} V(r) d^3r$$

et Ω est le volume du système.

La méthode générale des fonctions de Green appliquée au problème à N corps a été développée, sous la forme où nous l'utilisons, par Galitskii et Migdal [*14*] et nous nous servons ici de leurs résultats. Nous nous bornons à l'étude des propriétés du système à *température nulle*; la généralisation au cas des températures non nulles ne pose pas de difficulté de principe, mais elle met en jeu un formalisme plus compliqué.

Fonction de Green à une particule. — La fonction de Green à une particule est définie par la relation :

$$G(\kappa t, \kappa' t') = i \langle \varphi_0 \,|\, T \{ a_\kappa(t) a^+_{\kappa'}(t') \} \,|\, \varphi_0 \rangle \tag{4.3}$$

où $a_\kappa(t)$ et $a^+_{\kappa'}(t')$ sont les opérateurs destruction et création écrits en représentation d'Heisenberg, $|\, \varphi_0 \rangle$ le vecteur normalisé état de base *réel* du

système, T l'opérateur « chronologique » habituel. κ est une notation condensée pour l'ensemble (k, σ).

$G(\kappa t, \kappa' t')$ décrit la propagation d'une particule ou d'un trou supplémentaire ajouté à l'état de base.

Nous introduisons la transformée de Fourier de (4.3) :

$$G(\kappa\omega, \kappa'\omega') = \frac{1}{2\pi}\int\int dt dt' G(\kappa t, \kappa' t') e^{i(\omega t - \omega' t')}. \tag{4.4}$$

Étant donné les propriétés d'invariance de H, $G(\kappa t, \kappa' t')$ est diagonale dans l'espace des κ, et ne dépend que de $(t - t')$. Dans ces conditions $G(\kappa\omega, \kappa'\omega')$ peut s'écrire sous la forme :

$$G(\kappa\omega, \kappa'\omega') = G(k, \omega)\,\delta_{kk'}\,\delta_{\sigma\sigma'}\,\delta(\omega - \omega'). \tag{4.5}$$

Soulignons que (4.5) n'est pas valable pour un système quelconque. En particulier $G(\kappa\omega, \kappa'\omega')$ n'est diagonale dans l'espace des k que si k est un bon nombre quantique, c'est-à-dire si le système est invariant par translation. Nous verrons que ce n'est pas le cas pour un système impur.

Fonction de Green à deux particules. — Par définition :

$$K(\kappa_i, t_i) = \langle \varphi_0 \,|\, T\,\{\, a_{\kappa_1}(t_1)\, a_{\kappa_2}(t_2)\, a^{+}_{\kappa_3}(t_3)\, a^{+}_{\kappa_4}(t_4)\,\}\,|\,\varphi_0\rangle \tag{4.6}$$

$K(\kappa_i, t_i)$ décrit la propagation d'une paire d'excitations (soit deux particules, soit deux trous, soit une paire particule-trou, selon l'ordre des t_i) ajoutées à l'état de base.

La transformée de Fourier de (4.6) est donnée par :

$$K(\kappa_i, \omega_i) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int dt_i K(\kappa_i, t_i) e^{i(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2 - \omega_3 t_3 - \omega_4 t_4)}. \tag{4.7}$$

A cause des propriétés d'invariance de H, $K(\kappa_i, \omega_i)$ contient un facteur $\delta(\kappa_1 + \kappa_2 - \kappa_3 - \kappa_4)\,\delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4)$.

La fonction $K(\kappa_i\omega_i)$ nous renseigne sur l'interaction entre quasi-particules et nous permet d'étudier les phénomènes de corrélation (états liés de deux excitations élémentaires, réponse du système à une excitation extérieure).

DÉVELOPPEMENT DE PERTURBATION : ANALYSE DIAGRAMMATIQUE. — Pour calculer les fonctions de Green G et K, nous utilisons la méthode de « perturbation » dépendante du temps. Les différents termes du développement de perturbation peuvent se représenter par des diagrammes de Feynman, bâtis à l'aide de « vertex » et de « lignes de propagation » :

— un « vertex » représente l'interaction élémentaire entre deux particules (ou trous) décrite par H_1. Cette interaction est figurée par une ligne ondulée (fig. IV.1). Au vertex de la figure IV.1 correspond un facteur :

$$V(k_1 - k_3)\delta(k_1 + k_2 - k_3 - k_4)\delta_{\sigma_1\sigma_3}\delta_{\sigma_2\sigma_4}\delta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4) \; ; \quad (4.8)$$

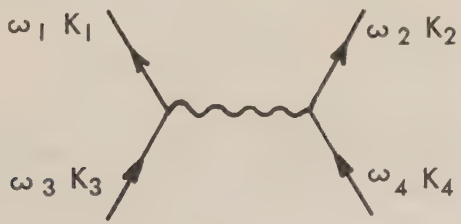

FIG. IV.1.

— une « ligne de propagation » décrit la propagation d'une particule entre deux interactions. Chaque ligne est caractérisée par un vecteur d'onde k, un spin σ, une énergie ω et correspond à un facteur :

$$g_0(k,\omega) = \left(\frac{k^2}{2m} - \omega \pm i\eta\right)^{-1} \quad (4.9)$$

où η est infiniment petit.

$g_0(k, \omega)$ est la fonction de Green à une particule du système sans interaction. Une ligne de propagation peut — ou bien relier deux vertex — ou bien garder une extrémité libre Dans ce dernier cas on dit que c'est une ligne « extérieure ».

Les diagrammes contribuant à G(K, ω) comportent deux lignes extérieures : une ligne « entrante » (Kω) et une ligne « sortante » (Kω) (exemple : diagramme de la figure IV.2 *a*).

Les diagrammes contribuant à $K(K_i, \omega_i)$ comportent quatre lignes extérieures, deux lignes « entrantes » ($K_3\omega_3$ et $K_4\omega_4$) et deux lignes « sortantes » ($K_1\omega_1$ et $K_2\omega_2$) (exemple : diagramme de la figure IV.2 *b*).

FIG. IV.2.

II. — Système impur. Vertex d'impureté. Moyenne sur les configurations d'impuretés

Considérons maintenant un système impur. Soit N_i le nombre d'impuretés réparties dans le volume Ω et soit R_i la position de la $i^{\text{ème}}$ impureté. Cette impureté crée au point r un potentiel $W(r - R_i)$. L'hamiltonien total comprend un nouveau terme H′ qui décrit l'interaction entre les fermions et les impuretés :

$$H' = \sum_i \sum_{\substack{kq \\ \sigma}} W(q) e^{-iqR_i} a^+_{k+q,\sigma} a_{k,\sigma}. \tag{4.10}$$

Pour calculer G et K nous faisons un développement de perturbation en puissances de V et W à la fois. Il apparaît dans les diagrammes un type nouveau de vertex décrivant l'interaction entre un fermion et une impureté. Cette interaction sera représentée par une ligne pointillée, appelée ultérieurement « ligne d'impureté » (fig. IV.3). Au vertex de la figure IV.3 correspond un facteur :

$$\sum_i e^{-i(k_1 - k_2)R_i} W(k_1 - k_2)\delta(\omega_1 - \omega_2)\delta_{\sigma_1\sigma_2}. \tag{4.11}$$

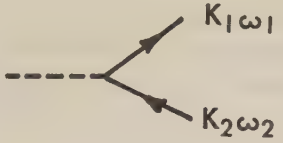

FIG. IV.3.

IMPURETÉS « INDÉPENDANTES » MOYENNE SUR LES CONFIGURATIONS D'IMPURETÉS. — Sous la forme (4.10), l'hamiltonien H' dépend de la position des impuretés. *A priori* les fonctions de Green du système en dépendent aussi. Pour éviter cette difficulté on *suppose* que les impuretés sont « indépendantes », c'est-à-dire qu'il n'y a *aucune corrélation* entre leurs positions R_i. Kohn et Luttinger [*10*] ont montré que dans ces conditions, on peut remplacer certaines quantités $P(R_i)$ par leur valeur moyenne $\langle P \rangle$ prise sur toutes les configurations de R_i possibles :

$$\langle P \rangle = \frac{1}{\Omega^{N_i}} \int dR_1 \ldots dR_{N_i} P(R_i). \tag{4.12}$$

Nous allons donc dans le cadre de l'approximation des « impuretés indépendantes » calculer la moyenne des fonctions de Green. Nous suivons la technique développée par Edwards [*12*] et Langer [*17*].

Considérons un diagramme contenant m vertex d'impureté du type IV.3, caractérisés par des transferts de quantités de mouvement $k_1 - k_2 = q_l$ ($l = 1$ à m). D'après (4.11), la contribution de ce diagramme contient le produit :

$$P(q_l, R_i) = d(q_1) \ldots d(q_m)$$

où :

$$d(q_l) = \sum_i e^{iq_l R_i}. \tag{4.13}$$

Faire la moyenne du diagramme, revient à remplacer $P(q_l, R_i)$ par l'expression :

$$\langle P(q_l) \rangle = \frac{1}{\Omega^{N_i}} \int dR_1 \ldots dR_{N_i} d(q_1) \ldots d(q_m).$$

L'intégrale sur les R_i se fait sans peine. En négligeant les termes qui tendent vers zéro lorsque Ω augmente indéfiniment, on obtient :

$$\langle P(q_l) \rangle = (2\pi)^3 n_i \delta(q_1 + q_2 + \ldots + q_m) + (2\pi)^6 n_i^2 \Sigma^{(2)} \delta(q_1 + \ldots) \delta(q_m + \ldots) + (2\pi)^9 n_i^3 \Sigma^{(3)} \delta(\ ) \delta(\ ) \delta(\ ) + \ldots \tag{4.14}$$

où :

$$n_l = \frac{N_l}{\Omega} \tag{4.15}$$

et où $\Sigma^{(2)}$ représente la somme de toutes les répartitions possibles des m vecteurs q_l en deux groupes, $\Sigma^{(3)}$ celle des répartitions en trois groupes, etc. $\langle P(q_l) \rangle$ a l'avantage de se présenter comme un développement en puissances de n_i. Dans la limite des faibles densités d'impuretés on pourra se limiter au premier terme de (4.14).

Soulignons les limites de l'approximation considérée : en supposant les impuretés complètement indépendantes, nous permettons en particulier à deux impuretés d'occuper la même position. Nous adoptons ce modèle à cause de sa simplicité, bien qu'il ne soit pas très réaliste aux fortes concentrations d'impuretés. Nous verrons au chapitre VII comment on pourrait tenir compte des effets de corrélation entre les impuretés.

III. — Fonction de Green à une particule. Énergie propre. Excitations élémentaires

1° Diagrammes représentant la fonction de Green moyenne à une particule. — Considérons la fonction $G(\kappa\omega, \kappa'\omega')$ définie par (4.4). Pour un système impur, cette fonction n'est pas diagonale dans l'espace des k (car k ne commute pas avec H'). (4.5) doit être remplacé par :

$$G(\kappa\omega, \kappa'\omega') = G(k, k', \omega)\, \delta_{\sigma\sigma'}\, \delta(\omega - \omega'). \tag{4.16}$$

Considérons par exemple le diagramme D, donné par la figure IV.4. D contient trois lignes d'impureté de quantités de mouvement q_1, q_2, q_3. Nous savons qu'il y a conservation de la quantité de mouvement aux vertex (V) ; par conséquent on a par construction :

$$k' - k = q_1 + q_2 + q_3.$$

Si le diagramme comportait m vertex d'impureté, on aurait :

$$k' - k = \sum_{l=1}^{m} q_l. \tag{4.17}$$

Prenons maintenant la moyenne de ces diagrammes. Il apparaît des facteurs du type (4.14). En combinant (4.14) et (4.17) on voit que tous les termes du développement de $\overline{G(k, k', \omega)}$ contiennent un facteur $\delta_{kk'}$. Nous écrirons :

$$\overline{G(k, k', \omega)} = G(k, \omega)\delta_{kk'}. \tag{4.18}$$

Nous avons en quelque sorte restauré la conservation de la quantité de mouvement en faisant la moyenne de G *sur les configurations d'impuretés.*

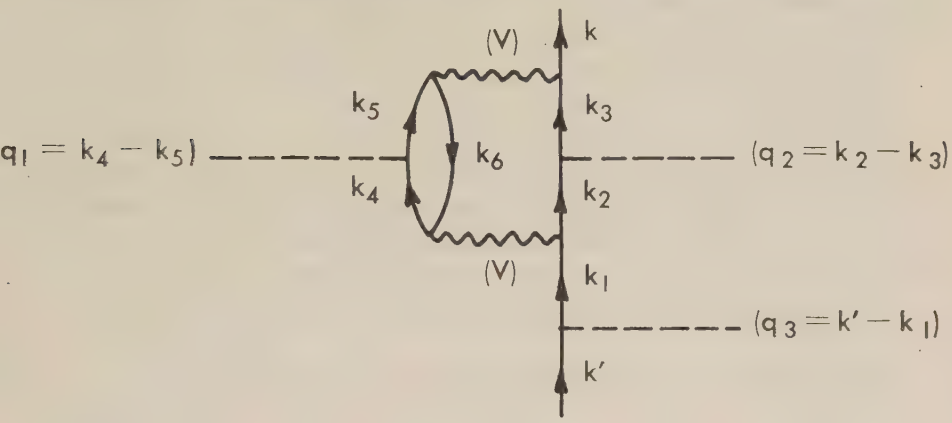

FIG. IV.4.

Nous appuyant sur le développement (4.14), nous pouvons utiliser pour représenter $G(k, \omega)$ un nouveau type de diagrammes, dans lesquels les lignes d'impureté sont groupées en un certain nombre de faisceaux [17]. Un faisceau composé de j lignes d'impureté de quantités de mouvement $q_1 \ldots q$ fournit un facteur $n_i\delta(q_1 + \ldots + q_j)$. Par exemple, parmi les diagrammes contribuant à la moyenne de D (fig. IV.4), figurent les deux diagrammes de la figure IV.5. La contribution du diagramme IV.5 *a* contient le facteur $n_i\delta(q_1 + q_2 + q_3)$, celle du diagramme IV.5 *b* le facteur :

$$n_i^2\delta(q_2) \times \delta(q_1 + q_3).$$

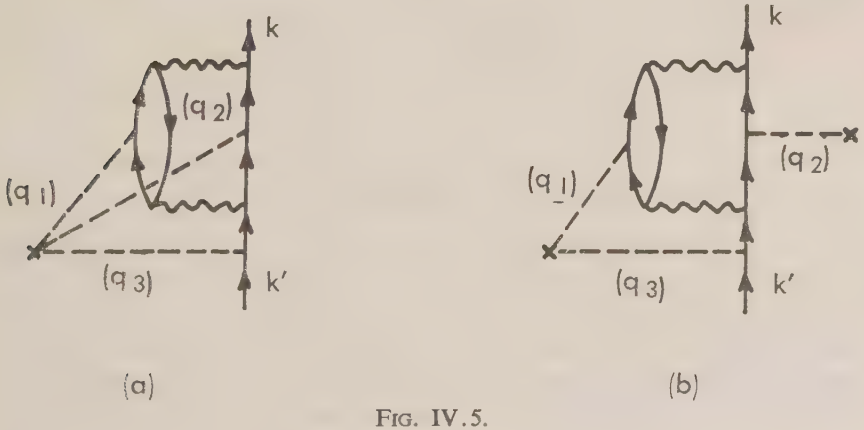

FIG. IV.5.

La signification physique de ces nouveaux diagrammes est claire. Un diagramme contenant p faisceaux de lignes d'impureté décrit la diffusion simultanée d'une particule par p impuretés différentes : la contribution correspondante est d'ordre n_i^p. La présence des facteurs $\delta(q_1 + \ldots q_j)$ indique que la quantité de mouvement *moyenne* transférée par une impureté est nulle.

2° **Réduction de G : noyau d'énergie propre.** — Après avoir pris la moyenne sur les impuretés, nous pouvons décomposer les diagrammes contribuant à $G(k, \omega)$ de la manière habituelle. Par définition un noyau irréductible ne peut se décomposer suivant le schéma de la figure IV.6 *a*.

Par exemple IV.6 *b* est irréductible, alors que IV.6 *c* ne l'est pas.

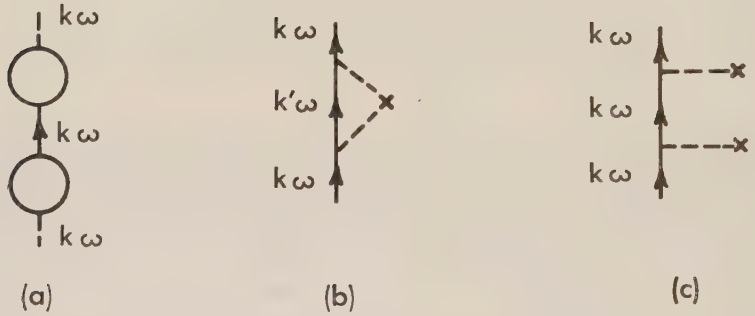

FIG. IV.6.

Soit $M(k, \omega)$ la contribution de l'ensemble des noyaux irréductibles, appelée « énergie propre ». On a :

$$G(k,\omega) = \frac{g_0(k, \omega)}{1 - g_0(k, \omega)M(k, \omega)} = \frac{1}{\frac{k^2}{2m} - \omega - M(k, \omega)}. \qquad (4.19)$$

Dans la limite des *faibles densités d'impuretés*, les termes prépondérants sont ceux de plus bas ordre en n_i : nous poserons :

$$M(k, \omega) = M^0(k, \omega) + M^{(1)}(k, \omega) + 0(n_i^2) \qquad (4.20)$$

$M_0(k, \omega)$ représente l'énergie propre du système pur, que nous supposons connue. $M^{(1)}(k, \omega)$ est donné par l'ensemble des diagrammes ayant toutes leurs lignes d'impureté réunies en un seul faisceau, représentant l'ensemble des interactions avec une impureté unique. Soit $t(k, k', \omega)$ la matrice qui

décrit la diffusion d'une particule du système par *une* impureté. Pour avoir $M^{(1)}(k, \omega)$ il suffit d'ajouter un facteur $n_i \delta_{kk'}$. On a donc :

$$M^{(1)}(k, \omega) = n_i t(k, k, \omega). \tag{4.21}$$

3° **Structure analytique de G et M. Excitations élémentaires.** — Considérons d'abord les valeurs *réelles* de ω. De (4.19) nous tirons :

$$\operatorname{Im} G(k, \omega) = \frac{\operatorname{Im} M(k, \omega)}{\left| \frac{k^2}{2m} - \omega - \operatorname{Re} M(k, \omega) \right|^2 + |\operatorname{Im} M(k, \omega)|^2}. \tag{4.22}$$

Il résulte de la structure générale des fonctions de Green que :

— Im $G(k, \omega)$ et Im $M(k, \omega)$ ont le signe de $(\omega - \mu)$, où μ est le potentiel chimique du système;

— la quantité $A(k, \omega) = \frac{1}{\pi} | \operatorname{Im} G(k, \omega) |$ représente la densité spectrale, de particules pour $\omega > \mu$, de trous pour $\omega < \mu$. Si $A(k, \omega)$ présente un pic centré en $\omega = \xi_k$, de largeur Γ_k, le prolongement analytique de $G(k, \omega)$ possède deux pôles imaginaires conjugués, situés en $\omega = \xi_k \pm i\Gamma_k$, correspondant à une excitation élémentaire de vecteur d'onde k.

a) Pour un système *pur*, au voisinage de $\omega = \mu$, on a :

$$\operatorname{Im} M^0(k, \omega) \sim (\omega - \mu)^2 \operatorname{signe} (\omega - \mu). \tag{4.23}$$

Le pic de A est infiniment étroit lorsque $\xi_k = \mu$. On peut définir une surface de Fermi S_F dans l'espace des k, telle que $\xi_{k_f} = \mu$. S_F est une surface de discontinuité, séparant les quasi-particules ($k > k_f$) des quasi-trous ($k < k_f$).

b) Pour un système *impur*, au voisinage de $\omega = \mu$, on a :

$$\operatorname{Im} M(k, \omega) \sim \Gamma \operatorname{signe} (\omega - \mu) \tag{4.24}$$

$M(k, \omega)$ est discontinu au point $\omega = \mu$. Le pic de A a une largeur finie quel que soit k. Pour $| \xi_k - \mu | \leqslant \Gamma$, ce pic déborde de part et d'autre de $\omega = \mu$ (voir fig. IV.7). L'excitation de vecteur d'onde k est donc mi-particule, mi-trou. Cette ambiguïté traduit l'incertitude $\Delta k_f \sim \frac{\Gamma}{v_f}$ sur la position de S_F : on ne peut pas dire de la région de l'espace des k correspondante, qu'elle est à l'intérieur ou à l'extérieur de S_F. La surface de Fermi est « floue »

dans l'espace des k, essentiellement parce que la quantité de mouvement n'est pas conservée dans les collisions sur les impuretés. L'énergie, elle, est conservée, ce qui explique l'existence d'une vraie discontinuité à $\omega = \mu$.

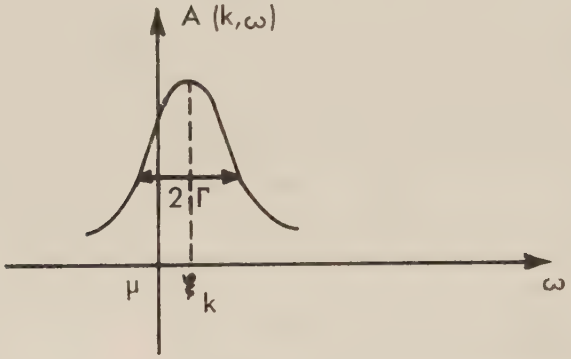

FIG. IV.7.

EXCITATIONS ÉLÉMENTAIRES. — Pour des valeurs réelles de ω, $M(k, \omega)$ peut s'écrire sous la forme :

$$M(k, \omega) = M_1(k, \omega) + iM_2(k, \omega) \operatorname{signe}(\omega - \mu) \tag{4.25}$$

où $M_1(k, \omega)$ et $M_2(k, \omega)$ sont des fonctions réelles et continues de ω.

Nous supposons désormais réalisées les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \xi_k \sim \mu, \ | \xi_k - \mu | \ll E_f \\ \omega \sim \xi_k \sim \mu, \ | \omega - \mu | \ll E_f \\ \Gamma_k \ll E_f \\ \dfrac{\partial M_1}{\partial \omega} \sim \dfrac{M_1}{E_f}, \dfrac{\partial M_2}{\partial \omega} \sim \dfrac{M_2}{E_f}. \end{cases} \tag{4.26}$$

Nous pouvons développer $M_1(k, \omega)$ et $M_2(k, \omega)$ au voisinage de $\omega = \xi_k$:

$$\begin{aligned} M_1(k, \omega) &= M_1(k, \xi_k) + (\omega - \xi_k) \frac{\partial M_1}{\partial \omega}(k, \xi_k) + \dots \\ M_2(k, \omega) &= M_2(k, \xi_k) + (\omega - \xi_k) \frac{\partial M_2}{\partial \omega}(k, \xi_k) + \dots \end{aligned} \tag{4.27}$$

Les pôles du prolongement analytique de $G(k, \omega)$, $\omega = \xi_k \pm i\Gamma_k$ sont donnés par l'équation :

$$0 = \frac{k^2}{2m} - \omega - M_1(k, \omega) - iM_2(k, \omega) \operatorname{signe}(\operatorname{Re}\omega - \mu). \tag{4.28}$$

En insérant (4.27) dans (4.28) et en séparant les parties réelle et imaginaire de l'équation, on obtient :

$$\frac{k^2}{2m} - \xi_k - M_1(k, \xi_k) - \Gamma_k \frac{\partial M_2}{\partial \omega}(k, \xi_k) = 0 \tag{4.29}$$

$$\Gamma_k \left[1 + \frac{\partial M_1}{\partial \omega}(k, \xi_k)\right] = M_2(k, \xi_k). \tag{4.30}$$

— En l'absence d'impuretés, au voisinage de la surface de Fermi :

$$\begin{cases} \xi_k = \varepsilon_k \\ \Gamma_k = \eta \ \text{(infiniment petit)}. \end{cases} \tag{4.31}$$

— Au premier ordre en n_i la contribution des impuretés à ξ_k et Γ_k s'obtient en reportant (4.20) dans (4.29) et (4.30). En négligeant tous les termes d'ordre $\frac{M^{(1)}}{E_f}$, nous obtenons :

$$\Delta\varepsilon_k = \xi_k - \varepsilon_k = - z_k \mathrm{Re}\ M^{(1)}(k, \varepsilon_k) = - n_i z_k \mathrm{Re}\ t(k, k, \varepsilon_k) \tag{4.32}$$

$$\Gamma_k = z_k \mid \mathrm{Im}\ M^{(1)}(k, \varepsilon_k) \mid = n_i z_k \mid \mathrm{Im}\ t(k, k, \varepsilon_k) \mid \tag{4.33}$$

où :

$$z_k = \left(1 + \frac{\partial M^0(k, \varepsilon_k)}{\partial \omega}\right)^{-1}. \tag{4.34}$$

Nous verrons que, dans la limite des faibles densités d'impuretés, $\Delta\varepsilon_k$ représente une petite variation de ε_k (et de μ) négligeable. Par contre, l'amortissement Γ_k des quasi-particules proches de la surface de Fermi a une influence importante sur les propriétés du système.

Partie cohérente de $G(k, \omega)$. — En utilisant le développement (4.27), pour ω réel et voisin de ξ_k, nous pouvons écrire $G(k, \omega)$ sous la forme :

$$G(k, \omega) = G^{\mathrm{coh}}(k, \omega) + G^{\mathrm{inc}}(k, \omega) \tag{4.35}$$

où :

$$G^{\mathrm{coh}}(k, \omega) = \frac{z_k}{\xi_k - \omega - i\Gamma_k \,\mathrm{signe}\,(\omega - \mu)} \tag{4.36}$$

et $G^{\mathrm{inc}}(k, \omega)$ est une fonction régulière de k et de ω. (4.36) représente ce qu'on a coutume d'appeler la partie « cohérente » de G et contient toute la « singularité » de G. La décomposition (4.35) nous sera utile par la suite.

4° **Valeur de Γ_k. Théorème optique.** — Posons $\Gamma_{k_f} = \Gamma$, $z_{k_f} = z$, où k_f est le vecteur d'onde de Fermi, défini par $\varepsilon_{k_f} = \mu$. D'après (4.27), à l'ordre le plus bas en n_i, on a :

$$\Gamma = n_i z \mid \mathrm{Im}\, t(k_f, k_f, \mu) \mid. \tag{4.37}$$

Pour des particules sans interaction, Im $t(k_f, k_f, \mu)$ est relié, par le théorème optique, à la section efficace de diffusion d'une particule libre de quantité de mouvement k_f. On peut généraliser ce théorème au cas de particules en interaction [*17*]. Nous esquisserons ici une démonstration dérivée d'un article de Landau [*15*].

Remarquons d'abord que la partie imaginaire d'un diagramme est déterminée par les facteurs de convergence $\pm i\eta$. Ceux-ci sont introduits dans la représentation « temps » pour faire converger les intégrales lorsque les temps t_i tendent vers l'infini. Les parties imaginaires sont donc « contrôlées » par le comportement asymptotique de chaque diagramme lorsqu'on l'allonge indéfiniment dans une direction quelconque. Considérons par exemple le diagramme de la figure IV.8 *a*, contribuant à $t(k, k, \omega)$, composé de deux noyaux B et C séparés par $(2p + 1)$ lignes intermédiaires. Nous supposons toutes les lignes « renormalisées ». Chaque ligne est donc associée à un propagateur complet $G^0(k_i, \omega_i)$, que nous pouvons décrire par sa représentation spectrale :

$$G^0(k_i, \omega_i) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega_i' \frac{A(k_i, \omega_i')}{\omega_i' - \omega_i - i\eta \ \mathrm{signe}\,(\omega_i' - \mu)}. \tag{4.38}$$

Imaginons que nous « tirions » sur ce diagramme en allongeant les $(2p + 1)$ lignes intermédiaires sans modifier les noyaux B et C. En représentation « temps » il apparaît après intégration un facteur :

$$\frac{1}{\omega - \sum_i \omega_i' + \sum_j \omega_j' \pm i\eta} \tag{4.39}$$

dont la partie imaginaire contribue à celle du diagramme.

En représentation « énergie », la contribution du diagramme (fig. IV.8 *a*) s'écrit :

$$m(k, \omega) = \sum_{k_i k_j} \int d\omega_i \, d\omega_j \ \mathrm{B\ C\ D} \tag{4.40}$$

où :

$$\mathrm{D} = \prod_i G^0(k_i \omega_i) \prod_j G^0(k_j \omega_j) \delta\Big(\omega - \sum_i \omega_i + \sum_j \omega_j.\Big). \tag{4.41}$$

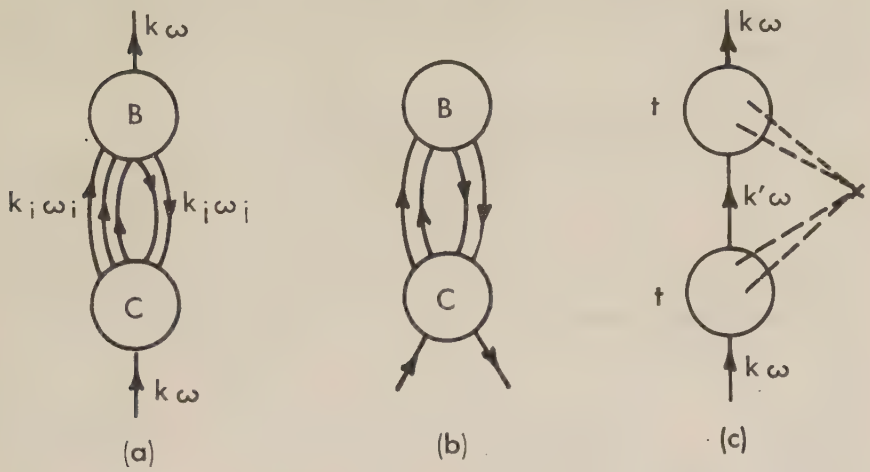

FIG. IV.8.

La partie imaginaire de (4.39) correspond à la contribution des *pôles* des $(2p + 1)$ lignes intermédiaires lorsqu'on intègre sur les ω et ω_j. Cette contribution à Im (m) se calcule aisément en insérant (4.38) dans (4.41); elle est égale à :

$$i\pi(2i\pi)^{2p}\sum_{k_i k_j}\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega_i'\int_{-\infty}^{+\infty}d\omega_j' \mathrm{BC}(\omega_i'\omega_j')\delta\Big(\omega-\sum_i\omega_i'+\sum_j\omega_j'\Big)$$

$$\times\prod_{ij}\mathrm{A}(k_i\omega_i')\mathrm{A}(k_j\omega_j')[\mathrm{Y}(\omega_i'-\mu)\mathrm{Y}(\mu-\omega_j')-\mathrm{Y}(\mu-\omega_i')\mathrm{Y}(\omega_j'-\mu)] \quad (4.42)$$

où :

$$\mathrm{Y}(x)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad x>0\\ 0 & \text{si} \quad x<0.\end{cases}$$

La valeur totale de Im (m) s'obtient en découpant le diagramme en deux morceaux de toutes les manières possibles (On vérifie facilement que les diagrammes du type IV.8 *b* n'ont pas de partie imaginaire).

En général, tous ces facteurs imaginaires se combinent les uns avec les autres pour donner un résultat compliqué. La situation se simplifie lorsque ω est très voisin de μ : (4.42) est alors d'ordre $(\omega-\mu)^{2p}$ (essentiellement à cause du faible espace de phase disponible aux ω et ω_j). La contribution dominante correspond à $p = 0$, c'est-à-dire au diagramme de la figure IV.8 *c*. Puisque la ligne sélectionnée k' est *quelconque*, on trouve de chaque côté

une matrice *t complète*. La contribution correspondante à Im $t(k, k, \mu)$ est donc égale à :

$$|\operatorname{Im} t(k, k, \mu)| = \frac{1}{\Omega}\sum_{k'} t(k, k', \mu)\,|\,A(k', \mu)\,|\,t(k', k, \mu)$$
$$= \frac{1}{\Omega}\sum_{k'} |\,t(k, k', \mu)\,|^2 A(k', \mu) \qquad (4.43)$$

on peut remplacer $A(k', \mu)$ par sa partie cohérente $z_{k'}\delta(\varepsilon_{k'} - \mu)$ (rappelons que la partie incohérente de A est nulle pour $\omega = \mu$). Pour un système isotrope, on obtient ainsi :

$$\Gamma = n_i \frac{k_f m^*}{4\pi} z^2 \int_0^\pi |\,t(k_f, k'_f, \mu)\,|^2 \sin\xi d\xi \qquad (4.44)$$

où ξ désigne l'angle entre k et k'.

IV. — Fonction de Green à deux particules. Interaction irréductible.

1° Fonction de Green à deux particules moyennes. Noyau d'interaction. — Considérons la fonction de Green à deux particules $K(\kappa_i, \omega_i)$ définie par (4.7). En présence d'impuretés il n'y a pas conservation de la quantité de mouvement, donc $K(\kappa_i, \omega_i)$ ne contient pas le facteur :

$$\delta(k_1 + k_2 - k_3 - k_4).$$

Par contre, on retrouve ce facteur dans $\overline{K(\kappa_i, \omega_i)}$, moyenne de $K(\kappa_i, \omega_i)$ sur toutes les configurations d'impuretés.

Nous séparons $\overline{K(\kappa_i, \omega_i)}$ en deux termes :

— la partie « libre » décrit la propagation de deux excitations indépendantes et provient des diagrammes en deux morceaux. Sa contribution vaut :

$$G(\kappa_1, \omega_1)\,G(\kappa_2, \omega_2)\,(\delta_{13}\,\delta_{24} - \delta_{14}\,\delta_{23}) \qquad (4.45)$$

où :

$$\delta_{ij} = \delta(\kappa_i - \kappa_j)\,\delta(\omega_i - \omega_j).$$

— La partie « liée » contient l'information sur l'interaction des deux excitations et provient des diagrammes connexes (compte tenu des lignes d'impureté). Nous séparons les diagrammes correspondants en un noyau central, appelé « noyau d'interaction » et quatre propagateurs externes.

Soit $\gamma(K_i, \omega_i)$ la contribution de l'ensemble des noyaux d'interaction. La partie « liée » de $\overline{K}$ vaut :

$$\delta \overline{K} = \gamma(K_i, \omega_i)\, G(K_1, \omega_1)\, G(K_2, \omega_2)\, G(K_3, \omega_3)\, G(K_4, \omega_4). \qquad (4.46)$$

En regroupant (4.45) et (4.46), on obtient :

$$\overline{K(K_i, \omega_i)} = G(K_1, \omega_1)\, G(K_2, \omega_2)\, (\delta_{13}\, \delta_{24} - \delta_{14}\, \delta_{23}) + \gamma(K_i, \omega_i)\, G(K_1, \omega_1)\, G(K_2, \omega_2)\, G(K_3, \omega_3)\, G(K_4, \omega_4). \qquad (4.47)$$

La figure IV.9 représente graphiquement l'équation (4.47) :

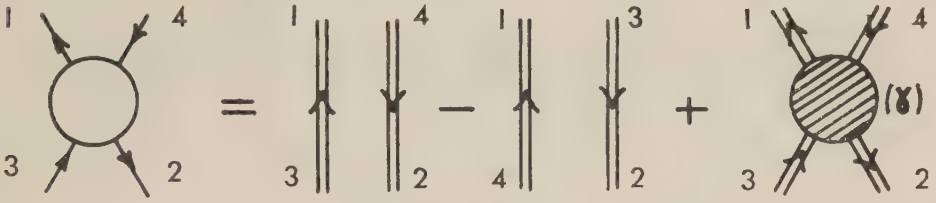

FIG. IV.9.

2° **Réduction des noyaux d'interaction. Équation de Bethe-Salpeter.** — Considérons le diagramme de γ indiqué sur la figure IV.10 *a* : il décrit la diffusion multiple d'une paire particule-trou. Nous désignerons sous le nom d'« interaction irréductible » $I(K_i, \omega_i)$, la contribution à $\gamma(K_i, \omega_i)$ de l'ensemble des diagrammes ne pouvant se décomposer suivant le schéma de la figure IV.10 *a*. Par exemple, le diagramme IV.10 *b* est irréductible, alors que IV.10 *c* ne l'est pas.

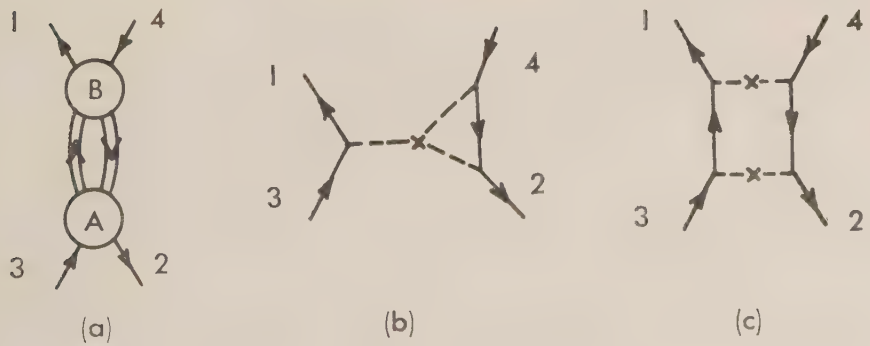

FIG. IV.10.

Pour obtenir γ il suffit d'itérer I un nombre quelconque de fois. L'équation graphique IV.11 est équivalente à la relation :

$$\gamma(K_1\omega_1, \ldots K_4\omega_4) = I(K_1\omega_1, \ldots K_4\omega_4) + \sum_{\substack{K_5\omega_5 \\ K_6\omega_6}} I(K_5\omega_5, K_2\omega_2, K_3\omega_3, K_6\omega_6) \times G(K_5, \omega_5)G(K_6, \omega_6)\gamma(K_1\omega_1, K_6\omega_6, K_5\omega_5, K_4\omega_4) \quad (4.48)$$

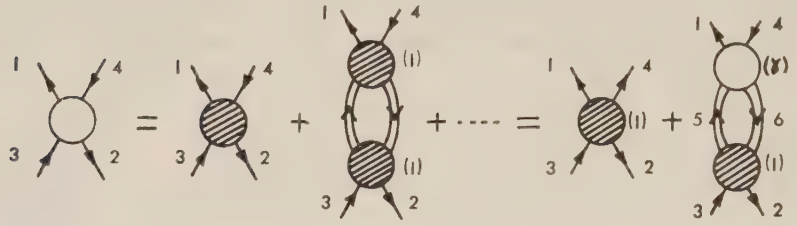

FIG. IV.11.

A ce stade il est bon de simplifier les notations. En ce qui concerne le spin, deux cas sont possibles selon que $\sigma_3 = \pm \sigma_2$. Nous nous restreignons au cas $\sigma_3 = \sigma_2$, la transposition au cas $\sigma_3 = -\sigma_2$ se faisant sans difficulté. D'autre part, nous utilisons les notations réduites suivantes :

$$\begin{array}{ll} k = (k_2 + k_3)/2 & \omega = (\omega_2 + \omega_3)/2 \\ k' = (k_1 + k_4)/2 & \omega' = (\omega_1 + \omega_4)/2 \\ q = k_2 - k_3 = k_4 - k_1 & \varepsilon = \omega_2 - \omega_3 = \omega_4 - \omega_1 \\ p = (k, \omega) \qquad P = (k, \sigma, \omega) = (K, \omega) & \varpi = (q, \varepsilon) \end{array} \quad (4.49)$$

et nous posons :

$$\begin{aligned} \gamma(p_1\sigma', p_2\sigma, p_3\sigma, p_4\sigma') &= \gamma(P, P', \varpi)\,\delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \\ I(p_1\sigma', p_2\sigma, p_3\sigma, p_4\sigma') &= I(P, P', \varpi)\,\delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \\ K(p_1\sigma', p_2\sigma, p_3\sigma, p_4\sigma') &= K(P, P', \varpi)\,\delta(p_1 + p_2 - p_3 - p_4). \end{aligned} \quad (4.50)$$

D'après (4.48), l'équation satisfaite par $\gamma(P, P', \varpi)$ s'écrit :

$$\gamma(P, P', \varpi) = I(P, P', \varpi) + \sum_{P''} I(P, P'', \varpi)G\left(p'' - \frac{\varpi}{2}\right)G\left(p'' + \frac{\varpi}{2}\right)\gamma(P'', P', \varpi) \quad (4.51)$$

(4.51) est l'équation de *Bethe-Salpeter* pour la diffusion d'une particule et d'un trou de spins parallèles.

3° Étude de l'interaction irréductible I. Cas des faibles densités d'impuretés. — Supprimons par la pensée les vertex d'impureté figurant dans les diagrammes de I : il reste une série de diagrammes « purs », contribuant à la fonction de Green à deux particules K^0 du système pur. Ces diagrammes « purs » peuvent appartenir à la partie « liée » ou à la partie « libre » de K^0. Nous dirons qu'un diagramme contribuant à $I(P, P', \varpi)$ est :

— de type (1), si le diagramme « pur » correspondant appartient à la partie « liée » de K^0;

— de type (2), si le diagramme « pur » correspondant appartient à la partie « libre » de K^0.

Le diagramme (*a*) de la figure IV.12 est de type (1), le diagramme (*b*) de type (2) :

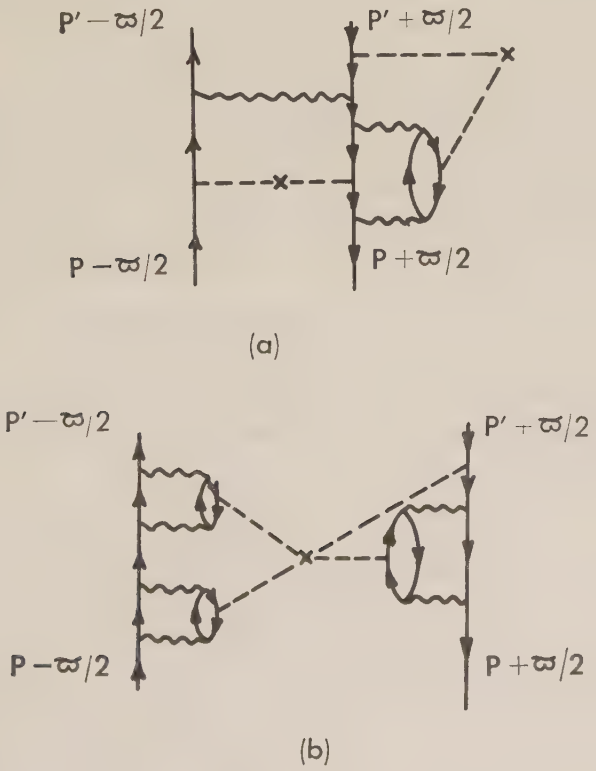

FIG. IV.12.

Dans la mesure où nous supposons les transferts d'énergie et de quantité de mouvement non nuls ($\varpi \neq 0$), la partie *libre* de K^0 se réduit à :

$$K_L^0 = G^0\left(p - \frac{\varpi}{2}\right) G^0\left(p + \frac{\varpi}{2}\right) \delta(P - P').$$

où G^0 représente la fonction de Green à une particule du système pur. En l'absence d'impuretés il y a conservation de k, ω, σ d'un bout à l'autre du diagramme. Lorsque nous introduisons les impuretés, nous perdons la conservation de la quantité de mouvement. Par contre, celle de l'énergie et du spin subsiste. Les diagrammes de type (2) contribuant à $I(P, P' \varpi)$ contiennent donc un facteur $\delta(\omega - \omega')\delta_{\sigma\sigma'}$. Un tel facteur n'apparaît pas dans les diagrammes de type (1), pour lesquels les variables P et P' sont complètement indépendantes. Afin d'isoler explicitement les termes *singuliers* correspondant aux diagrammes de type (2), nous écrivons I sous la forme :

$$I(P, P', \varpi) = I_1(P, P', \varpi) + I_2(P, P', \varpi)\, \delta(\omega - \omega')\delta_{\sigma\sigma'}. \qquad (4.52)$$

— I_1 a la même structure analytique que l'interaction I^0 pour un système pur (c'est-à-dire possède les mêmes lignes de coupure). Le principal effet des impuretés est d'introduire de petites discontinuités au passage par les points de branchement (comme pour M). Nous verrons que ces discontinuités n'ont aucun effet important sur les propriétés qui nous intéressent.

— Le deuxième terme de (4.52) est beaucoup plus singulier puisqu'il comporte un facteur $\delta(\omega - \omega')$.

Dans la limite des faibles densités d'impuretés, nous serons amenés à ne garder, pour I_1 et I_2, que les termes d'ordre le plus bas en n_i:

— En ce qui concerne I_1, le terme prépondérant est d'ordre zéro : il est égal à l'interaction irréductible du système pur. Nous écrivons donc :

$$I_1(P, P', \varpi) = I^0(P, P', \varpi) + 0(n_i). \qquad (4.53)$$

— En ce qui concerne I_2, le terme prépondérant est d'ordre n_i : il est donné par les diagrammes contenant un seul faisceau de lignes d'impureté. La contribution de ces diagrammes s'exprime facilement en fonction de la matrice de diffusion t introduite plus haut. Après un coup d'œil à la figure IV.12 *b*, nous écrivons :

$$I_2(P, P', \varpi) = \frac{1}{\Omega} n_i t\left(k - \frac{q}{2}, k' - \frac{q}{2}, \omega - \frac{\varepsilon}{2}\right) t\left(k' + \frac{q}{2}, k + \frac{q}{2}, \omega + \frac{\varepsilon}{2}\right) + 0(n_i^2). \qquad (4.54)$$

V. — Opérateurs de couplage et fonctions de corrélation

La réponse linéaire du système à un champ extérieur périodique, décrit par l'hamiltonien :

$$H_e = \sum_{K'} h(K') a^+_{K'+q/2} a_{K'-q/2} e^{-i\varepsilon t} + \text{c. c.} \tag{4.55}$$

fait intervenir la fonction :

$$\Delta(P, \varpi) = \sum_{P'} h(K')\, K(P, P', \varpi), \tag{4.56}$$

Δ peut se représenter par le diagramme de la figure IV.13, où le carré représente le couplage au champ extérieur et donne un facteur $h(K)$. En isolant les deux propagateurs externes, on obtient un opérateur de couplage $\Lambda(P, \varpi)$, défini par :

$$\Delta(P, \varpi) = \Lambda(P, \varpi)\, G(p + \varpi/2)\, G(p - \varpi/2). \tag{4.57}$$

En remplaçant $K(P, P', \varpi)$ par son développement (4.47), on vérifie (supposant $\varpi \neq 0$) que :

$$\Lambda(P, \varpi) = h(K) + \sum_{P'} h(K')\, \gamma(P, P', \varpi)\, G(p' + \varpi/2)\, G(p' - \varpi/2). \tag{4.58}$$

La figure IV.13 traduit graphiquement la relation (4.58).

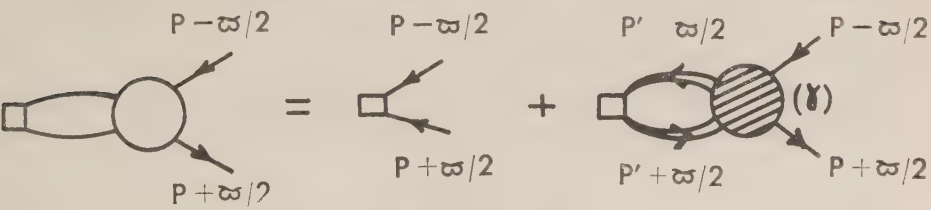

FIG. IV.13.

Décomposons γ en noyaux irréductibles : en combinant (4.51) et (4.58), on obtient l'équation de Bethe-Salpeter pour les opérateurs de couplage :

$$\Lambda(P, \varpi) = h(K) + \sum_{P'} I(P, P', \varpi) G(p' + \varpi/2)\, G(p' - \varpi/2)\, \Lambda(P', \varpi). \tag{4.59}$$

(4.59) *est l'équation intégrale dont nous partirons pour établir l'équation de transport.*

Nous étudierons plus particulièrement le cas où le champ extérieur se couple à une quantité conservée par l'interaction entre les particules, c'est-à-dire à la densité de charge, à la densité de spin ou à la densité de courant. Les fonctions Δ_μ et Λ_μ qui interviennent dans les différents cas correspondent au choix :

$$h(K) = \lambda_\mu(K) = \begin{cases} \dfrac{k_\alpha}{m} \text{ si } \mu = \alpha \ (\alpha = 1, 2, 3) & \text{(couplage à la composante cartésienne } \alpha \text{ du courant)} \\ 1 \text{ si } \mu = 4 & \text{(couplage à la charge)} \\ \sigma \text{ si } \mu = 5 & \text{(couplage au spin).} \end{cases} \tag{4.60}$$

L'équation de Bethe-Salpeter satisfaite par Λ_μ s'obtient en remplaçant, dans l'équation générale (4.59), $h(K)$ par $\lambda_\mu(K)$.

Fonctions de corrélation. — Elles sont définies par l'une ou l'autre des relations suivantes :

$$S_{\mu\nu}(\varpi) = \sum_{P,P'} \lambda_\mu(K)\lambda_\nu(K') \, K(P, P', \varpi) \tag{4.61}$$

$$S_{\mu\nu}(\varpi) = \sum_{P} \lambda_\mu(K) \, G(p + \varpi/2) \, G(p - \varpi/2) \, \Lambda_\nu(P, \varpi). \tag{4.62}$$

S_{44} est la fonction de corrélation des densités de particules, elle est reliée à la constante diélectrique. S_{55} est la fonction de corrélation des densités de spin. $S_{\alpha\beta}$ est la fonction de corrélation des densités de courant : elle est reliée à la conductivité électrique.

On peut représenter les fonctions de corrélation par des diagrammes (fig. IV.14). Ces diagrammes sont symétriques : on en déduit que :

$$S_{\mu\nu}(\varpi) = S_{\nu\mu}(-\varpi).$$

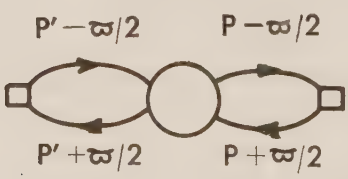

FIG. IV.14.

VI. — Systèmes chargés. Diagrammes propres et impropres

Lorsque les forces d'interaction du système sont à longue portée, la transformée de Fourier $V(q)$ de l'interaction binaire diverge pour $q \to 0$. Prenons par exemple des électrons interagissant par des forces de Coulomb, plongés dans une charge positive uniforme, telle que le système soit globalement neutre. $V(q)$ est donné par :

$$\begin{cases} V(q) = \dfrac{4\pi e^2}{q^2} \text{ si } q \neq 0 \\ V(0) = 0. \end{cases} \tag{4.63}$$

Considérons le diagramme IV.15 *a*, contribuant à $\gamma(P, P', \varpi)$. Par construction la ligne d'interaction centrale a un vecteur d'onde q. Sa contribution est singulière lorsque $q \to 0$: nous dirons que le diagramme est « impropre ». Au contraire, est appelé « propre » tout diagramme qui ne peut se scinder en deux morceaux reliés uniquement par une ligne ondulée de vecteur d'onde q. La notion de diagramme propre et impropre s'étend facilement aux opérateurs de couplage Λ_μ et aux fonctions de corrélation $S_{\mu\nu}$. Nous désignerons par $\tilde{\gamma}(P, P', \varpi)$, $\tilde{\Lambda}_\mu$, $\tilde{S}_{\mu\nu}$, la contribution de l'ensemble des diagrammes propres dans chacun des cas.

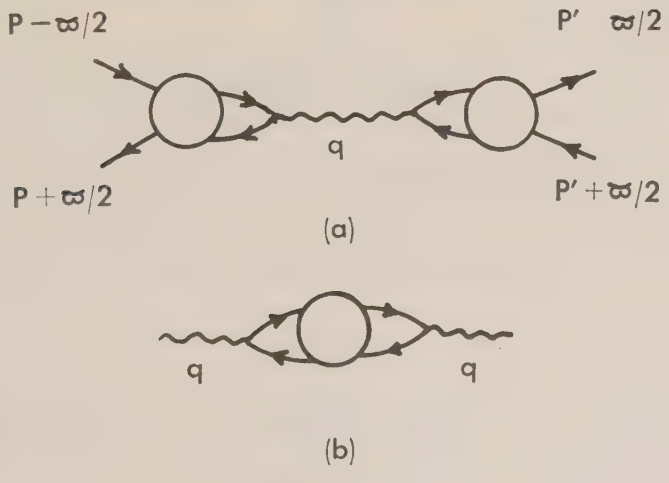

FIG. IV.15.

Le diagramme de γ le plus général contient un nombre quelconque de lignes d'interaction q, séparées par des « noyaux de polarisation » qui sont des diagrammes propres de S_{44} (fig. IV.15 *b*). Pour obtenir γ, il faut sommer la série de la figure IV.16. Cette série est géométrique et conduit à la relation :

$$\gamma(P, P', \varpi) = \tilde{\gamma}(P, P', \varpi) - \frac{iV(q)}{2\pi\Omega}\left[\frac{\tilde{\Lambda}_4(P, \varpi)\ \tilde{\Lambda}_4(P', \varpi)}{1 + \frac{iV(q)}{2\pi\Omega}\tilde{S}_{44}(\varpi)}\right]. \qquad (4.64)$$

En opérant de même pour Λ_μ et $S_{\mu\nu}$, on obtient :

$$\Lambda_\mu(P, \varpi) = \tilde{\Lambda}_\mu(P, \varpi) - \frac{iV(q)}{2\pi\Omega}\left[\frac{\tilde{\Lambda}_4(P, \varpi)\ \tilde{S}_{4\mu}(\varpi)}{1 + \frac{iV(q)}{2\pi\Omega}\tilde{S}_{44}(\varpi)}\right] \qquad (4.65)$$

$$S_{\mu\nu}(\varpi) = \tilde{S}_{\mu\nu}(\varpi) - \frac{iV(q)}{2\pi\Omega}\left[\frac{\tilde{S}_{\mu 4}(\varpi)\,\tilde{S}_{4\nu}(\varpi)}{1 + \frac{iV(q)}{2\pi\Omega}\tilde{S}_{44}(\varpi)}\right]. \qquad (4.66)$$

Dans le cas particulier $\mu = 4$, nous pouvons écrire (4.65) sous la forme :

$$\Lambda_4(P, \varpi) = \frac{\tilde{\Lambda}_4(P, \varpi)}{\mathcal{E}(\varpi)} \qquad (4.67)$$

où $\mathcal{E}(\varpi)$ est défini par :

$$\mathcal{E}(\varpi) = 1 + \frac{iV(q)}{2\pi\Omega}\tilde{S}_{44}(\varpi). \qquad (4.68)$$

$\mathcal{E}(\varpi)$ est la constante diélectrique du système. Les opérateurs de couplage et les fonctions de corrélation faisant intervenir la charge sont donc réduits d'un facteur $\mathcal{E}$ par l'introduction des noyaux de polarisation : ceci traduit simplement l'effet d'écran exercé par le milieu sur les charges extérieures :

FIG. IV.16.

Soit $\tilde{I}(P, P', \varpi)$ la contribution de l'ensemble des diagrammes d'interaction irréductibles propres. Le seul diagramme d'interaction irréductible qui soit impropre est celui du premier ordre en $V(q)$. On a donc :

$$\tilde{I}(P, P', \varpi) = I(P, P', \varpi) - \frac{V(q)}{2i\pi\Omega}. \tag{4.69}$$

Les équations de Bethe-Salpeter (4.51) et (4.59) sont aussi valables pour les quantités irréductibles correspondantes $\tilde{I}$, $\tilde{\gamma}$, $\tilde{\Lambda}$.

CHAPITRE V

SINGULARITÉS DE γ, Λ, S LORSQUE qv_f, ε, $\Gamma \ll E_f$

Avant d'établir l'équation de transport, nous allons étudier en détail les fonctions $\gamma(P, P', \varpi)$, $\Lambda(P, \varpi)$, $S(\varpi)$ introduites dans le chapitre précédent, lorsque q et ε satisfont les conditions :

$$\begin{cases} qv_f \ll E_f \\ \varepsilon \ll E_f. \end{cases} \tag{5.1}$$

Nous supposons que la densité d'impuretés est assez faible pour qu'on ait aussi :

$$\Gamma \ll E_f \tag{5.2}$$

où Γ est l'amortissement des excitations élémentaires au voisinage de la surface de Fermi, donné par (4.44).

On sait que pour un système pur, la limite de ces quantités pour $\varpi \to 0$ est fonction du rapport qv_f/ε. En présence d'impuretés, les résultats dépendent en outre du rapport ε/Γ (ou qv_f/Γ). Dans ce qui suit nous ne faisons aucune hypothèse sur la valeur des rapports qv_f/ε, ε/Γ, qv_f/Γ, mais nous négligeons tout terme qui est d'ordre qv_f/E_f, ε/E_f, Γ/E_f.

I. — Origine des singularités de γ, Λ, S pour $\varpi \to 0$

Considérons un diagramme quelconque contribuant à γ, Λ ou S, et cherchons ses singularités.

a) Les vertex de vecteur d'onde fixé, égal à q, donnent un facteur divergent lorsque q tend vers zéro. En isolant les diagrammes « propres » (au sens

défini dans le chapitre IV), nous éliminons automatiquement cette source de singularités. Dans la suite de ce chapitre, nous nous limitons à l'étude des parties *propres* de γ, Λ, S.

Pour simplifier nous omettrons le « tilde », mais il est bien entendu que tout ce que nous dirons est valable seulement pour les quantités $\tilde{\gamma}$, $\tilde{\Lambda}$, $\tilde{S}$.

b) Les autres singularités proviennent des propagateurs. Considérons par exemple le diagramme de la figure V.1, contribuant à γ. Si nous le coupons suivant la droite *d*, nous repérons un « état intermédiaire » composé de p particules et p trous. L'énergie de cet état vaut $\sum_i \omega_i - \sum_j \omega_j = \varepsilon$. Sa quantité de mouvement vaut $\sum_i k_i - \sum_j k_j = q$. L'ensemble des $2p$ propagateurs donne, après intégration sur les variables ω_i, un facteur :

$$\frac{1}{\varepsilon - \sum_i \varepsilon_{k_i} + \sum_j \varepsilon_{k_j} - i\eta} \tag{5.3}$$

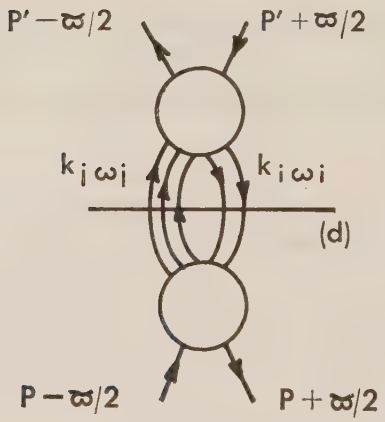

FIG. V.1.

Lorsque $p \geqslant 2$, l'énergie d'excitation $\sum_{ij} (\varepsilon_{k_i} - \varepsilon_{k_j})$ reste finie pour $q \to 0$: le facteur précédent est régulier. Si au contraire $p = 1$, on a :

$$Re\,(\varepsilon_k - \varepsilon_{k'}) = q.v_k$$

où $v_k = \nabla_k \varepsilon_k$ est la vitesse de la quasi-particule k. Nous verrons que le facteur (5.3) prend la forme :

$$\frac{1}{\varepsilon - q.v_k + 2i\Gamma}.$$

Le passage à la limite $(\varepsilon, q, \Gamma) \to 0$ est alors très délicat et dépend de l'ordre dans lequel on opère.

Nous sommes ainsi amenés à analyser en détail les singularités associées à la diffusion multiple trou-particule, c'est-à-dire à l'équation de Bethe-Salpeter. Ces singularités n'apparaissent pas dans le noyau irréductible $I(P, P', \varpi)$ (qui est régulier et que nous remplacerons par sa limite pour $\varpi \to 0$), mais dans le produit $G(p + \varpi/2)\, G(p - \varpi/2)$.

II. — Étude des singularités du produit $G(p + \varpi/2) \quad G(p - \varpi/2)$

Considérons la fonction $G(p)$, écrite sous la forme (4.35-4.36). La partie cohérente présente une discontinuité au point $\omega = \mu$, d'autant plus importante que ξ_k est voisin de μ. Le produit $G(p + \varpi/2)\, G(p - \varpi/2)$ contient à la fois les singularités de $G^{coh}(p + \varpi/2)$ et $G^{coh}(p - \varpi/2)$. Quand $\varpi \to 0$, les points où ces fonctions sont respectivement singulières se confondent : c'est pourquoi le passage à la limite est délicat et dépend de la valeur des rapports qv_f/Γ, ε/Γ, qv_f/ε.

Dans les équations de Bethe-Salpeter, le produit $G(p + \varpi/2)\, G(p - \varpi/2)$ fait partie du « noyau ». Il intervient dans des expressions de la forme :

$$E = \sum_k \int d\omega f(k,\omega)\, G(p + \varpi/2) \quad G(p - \varpi/2) \tag{5.4}$$

où $f(k, \omega)$ est une fonction régulière de $\varepsilon_k \left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_k} \sim \frac{f}{E_f} \right)$, mais éventuellement singulière en ω (contenant par exemple un facteur $\delta(\omega - \omega')$). Nous allons voir que le produit $G(p + \varpi/2)\, G(p - \varpi/2)$ peut se mettre sous la forme :

$$\pi(p, \varpi) = [G^0(p)]^2 + R(p, \varpi) \tag{5.5}$$

où $R(p, \varpi)$ est une fonction simple de p et ϖ (à des termes d'ordre qv_f/E_f, ε/E_f, Γ/E_f près).

Pour mettre en évidence les discontinuités du produit GG aux points $\omega = \mu \pm \frac{\varepsilon}{2}$, nous posons :

$$G\left(p + \frac{\varpi}{2}\right) G\left(p - \frac{\varpi}{2}\right) = P(p, \varpi) + Q(p, \varpi) y(\omega, \varepsilon) \tag{5.6}$$

$$P(p, \varpi) = \left[G^{inc}\left(p + \frac{\varpi}{2}\right) + \frac{z^+}{\xi^+ - \omega^+ - i\Gamma^+ \text{ signe } (\omega - \mu)}\right] \left[G^{inc}\left(p - \frac{\varpi}{2}\right) + \frac{z^-}{\xi^- - \omega^- - i\Gamma^- \text{ signe } (\omega - \mu)}\right] \tag{5.7}$$

$$Q(p, \varpi) = \frac{z^+ z^-}{(\xi^+ - \omega^+ - i\Gamma^+)(\xi^- - \omega^- + i\Gamma^-)} - \frac{z^+ z^-}{[\xi^+ - \omega^+ - i\Gamma^+ \text{ signe } (\omega - \mu)][\xi^- - \omega^- - i\Gamma^- \text{ signe } (\omega - \mu)]} \tag{5.8}$$

$$\xi^\pm = \xi_{k \pm q/2}, \quad \Gamma^\pm = \Gamma_{k \pm q/2}, \quad z^\pm = z_{k \pm q/2}$$

$$\omega^\pm = \omega \pm \varepsilon/2$$

$$y(\omega, \varepsilon) = \begin{cases} 1 \text{ si } |\omega - \mu| < \varepsilon/2 \\ 0 \text{ si } |\omega - \mu| > \varepsilon/2. \end{cases} \tag{5.9}$$

Considérons d'abord la fonction $P(p, \varpi)$. Sa limite lorsque q, ε, $\Gamma \to 0$ est donnée sans ambiguïté par :

$$P^0(p) = \left[G^{0\,inc}(p) + \frac{z_k}{\varepsilon_k - \omega - i\eta \text{ signe } (\omega - \mu)}\right]^2 = \left[G^0(p)\right]^2$$

où l'indice ^{0} réfère au système pur ([2]). La différence $(P - P^0)$ n'est importante qu'au voisinage de $\omega = \varepsilon_k$; on peut facilement montrer que la quantité :

$$\sum_k \int d\omega f(k, \omega) \left[P(p, \varpi) - P^0(p)\right]$$

est au moins du premier ordre en qv/E_f, ε/E_f, Γ/E_f (voir appendice A).

Examinons maintenant la fonction $Q(p, \varpi)$. Le premier terme de (5.8) comporte, dans le plan complexe relatif à la variable ε_k, deux pôles situés *de part et d'autre de l'axe réel*. Lorsque q, ε, $\Gamma \to 0$, ces deux pôles tendent

([2]) Nous définissons ici la fonction de Green du système pur avec, au dénominateur de la partie cohérente, un $i\eta$ signe $(\omega - \mu)$ et non un $i\eta$ signe $(\varepsilon_k - \mu)$ comme on le fait généralement.

l'un vers l'autre et leur contribution diverge. Plus précisément, nous pouvons écrire le premier terme de Q sous la forme :

$$\frac{z^+ z^-}{(\xi^- - \xi^+ + \varepsilon + i\Gamma^+ + i\Gamma^-)} \left[\frac{1}{\xi^+ - \omega^+ - i\Gamma^+} - \frac{1}{\xi^- - \omega^- + i\Gamma^-} \right] \qquad (5.10a)$$

Lorsque q, ε, Γ tendent vers zéro, ce terme singulier tend vers :

$$z_k^2 \frac{2i\pi\delta(\varepsilon_k - \mu)}{2i\Gamma + \varepsilon - v_k . q} . \qquad (5.10b)$$

Notons que (5.10) est d'ordre (-1) en (q, ε, Γ), alors que le second terme de Q est d'ordre zéro.

Considérons maintenant une intégrale du type :

$$\sum_k \int d\omega \, f(k, \omega) \, Q(p, \varpi) \, y(\omega, \varepsilon)$$

f étant une fonction régulière de ε_k, le remplacement de (5.10a) par (5.10b) est justifié (voir appendice A). A cause du facteur y, la contribution correspondante est d'ordre 0 en (q, ε, Γ). Au contraire, le deuxième terme de Q donne une contribution du premier ordre (les deux pôles en ε_k étant alors du même côté de l'axe réel et ne contribuant pas à l'intégrale). Nous pouvons donc négliger ce deuxième terme, à des erreurs d'ordre qv_f/E_f, ε/E_f, Γ/E_f près.

En rassemblant ces résultats, nous voyons que le produit GG peut se mettre sous la forme (5.5) avec :

$$R(p, \varpi) = \frac{2i\pi z^2 \delta(\varepsilon_k - \mu)}{2i\Gamma + \varepsilon - v_k . q} y(\omega, \varepsilon). \qquad (5.11)$$

Remarque. — Si nous faisons tendre Γ vers zéro, nous retrouvons la limite du produit GG relative au système pur. En effet, les fonctions $f(k, \omega)$ étant alors régulières en ω, on peut remplacer $y(\omega, \varepsilon)$ par $\varepsilon\delta(\omega - \mu)$ et il vient :

$$\begin{aligned} \pi^0(p, \varpi) &= [G^0(p)]^2 + R^0(p, \varpi) \\ R^0(p, \varpi) &= \frac{2i\pi z^2 \varepsilon}{\varepsilon - v_k . q + i\eta} \delta(\varepsilon_k - \mu) \, \delta(\omega - \mu) \end{aligned} \qquad (5.12)$$

Notre $R^0(p, \varpi)$ diffère de celui de Nozières [*1*], parce que nous avons pris une définition différente pour $G^0(p)$ (voir note (²)). On montre aisément que (5.12) est équivalent à :

$$\pi^0(p, \varpi) = \left[\tilde{G}^0(p) \right]^2 + \frac{2\pi i z^2 v_k . q}{\varepsilon - v_k . q + i\eta} \delta(\varepsilon_k - \mu) \, \delta(\omega - \mu)$$

où : $$\tilde{G}^0(p) = G^{0\,\mathrm{inc}}(p) + \frac{z_k}{\varepsilon_k - \omega - i\eta \, \mathrm{signe} \, (\varepsilon_k - \mu)} .$$

III. — Isolement des singularités de γ, Λ, S. Équations de Bethe-Salpeter à la surface de Fermi

1° Isolement des singularités. Introduction des fonctions $\widehat{\gamma}$, $\widehat{\Lambda}$, $\widehat{S}$. — Réécrivons les équations de Bethe-Salpeter (4.51) et (4.59) pour $\varpi \to 0$:

$$\gamma(P, P', \varpi) = I(P, P') + \sum_{P''} I(P, P'') \{ [G^0(p'')]^2 + R(p'', \varpi) \} \gamma(P'', P', \varpi). \tag{5.13}$$

$$\Lambda(P, \varpi) = h(K) + \sum_{P'} I(P, P') \{ [G^0(p')]^2 + R(p', \varpi) \} \Lambda(P', \varpi). \tag{5.14}$$

I(P, P') désigne la limite pour $\varpi \to 0$ de I(P, P', ϖ). Lorsque $\varepsilon \equiv 0$, la correction R est nulle : les valeurs correspondantes $\widehat{\gamma}$ et $\widehat{\Lambda}$ sont données par :

$$\widehat{\gamma}(P, P') = I(P, P') + \sum_{P''} I(P, P'') [G^0(p'')]^2 \widehat{\gamma}(P'', P'). \tag{5.15}$$

$$\widehat{\Lambda}(P) = h(K) + \sum_{P'} I(P, P') [G^0(p')]^2 \widehat{\Lambda}(P'). \tag{5.16}$$

En combinant (5.13) et (5.15), puis (5.14) et (5.16), on aboutit sans peine aux relations :

$$\gamma(P, P', \varpi) = \widehat{\gamma}(P, P') + \sum_{P''} \widehat{\gamma}(P, P'') R(p'', \varpi) \gamma(P'', P', \varpi). \tag{5.17}$$

$$\Lambda(P, \varpi) = \widehat{\Lambda}(P) + \sum_{P'} \widehat{\gamma}(P, P') R(p', \varpi) \Lambda(P', \varpi). \tag{5.18}$$

De même les fonctions de corrélation $S_{\mu\nu}$ sont définies par :

$$S_{\mu\nu}(\varpi) = \sum_{P'} \lambda_\mu(K') \{ [G^0(p')]^2 + R(p' \varpi) \} \Lambda_\nu(P', \varpi). \tag{5.19}$$

Introduisons la quantité $\widehat{S}_{\mu\nu}$ définie par :

$$\widehat{S}_{\mu\nu} = \sum_{P'} \lambda_\mu(K') [G^0(p')]^2 \widehat{\Lambda}_\nu(P'). \tag{5.20}$$

En combinant (5.19) et (5.20), on obtient :

$$S_{\mu\nu}(\varpi) = \widehat{S}_{\mu\nu} + \sum_{P'} \widehat{\Lambda}_\mu(P') R(p', \varpi) \Lambda_\nu(P', \varpi). \tag{5.21}$$

En procédant ainsi, nous décomposons le calcul des limites de γ, Λ, S en deux étapes :

— la résolution des équations (5.15), (5.16) et (5.20) qui détermine les fonctions $\widehat{\gamma}$, $\widehat{\Lambda}$, $\widehat{S}$;

— la résolution des équations (5.17), (5.18) et (5.21) qui permet de relier les différentes limites de γ, Λ, S aux fonctions $\widehat{\gamma}$, $\widehat{\Lambda}$, $\widehat{S}$. Cette résolution est simplifiée du fait que le facteur $R(p'', \varpi)$ restreint le domaine d'intégration à la surface de Fermi ($\omega'' \sim \mu$ et $\varepsilon_{k''} \sim \mu$).

2° Étude des fonctions $\widehat{\gamma}$, $\widehat{\Lambda}$, $\widehat{S}$, dans la limite $\Gamma \ll E_f$. — Nous avons vu au chapitre IV qu'on pouvait écrire I(P, P') sous la forme :

$$I(P, P') = I_1(P, P') + I_2(P, P')\,\delta(\omega - \omega')\,\delta_{\sigma\sigma'}.$$

En étudiant le produit $G(p + \varpi/2)\,G(p - \varpi/2)$, nous avons négligé les termes d'ordre Γ/E_f. On serait tenté, dans le même esprit, de remplacer I(P, P') par $I^0(P, P')$, interaction irréductible du système pur. En fait, nous verrons que le terme $I_2(P, P')\,\delta(\omega - \omega')\,\delta_{\sigma\sigma'}$, hautement singulier, donne naissance à des termes d'ordre Γ/ε et Γ/qv_f. Par contre, $I_1(P, P')$ ne comportant que de petites discontinuités (d'ordre Γ) peut être remplacé par $I^0(P, P')$ à des corrections d'ordre Γ/E_f près. Nous posons donc :

$$I(P, P') = I^0(P, P') + I_2(k, k', \omega)\,\delta(\omega - \omega')\,\delta_{\sigma\sigma'} \tag{5.22}$$

et nous gardons pour I_2 le terme d'ordre le plus bas en n_i, donné par (4.54) :

$$I_2(k, k', \omega) = \frac{1}{\Omega} n_i \,|\, t(k, k', \omega) \,|^2. \tag{5.23}$$

Comme I(P, P'), $\widehat{\gamma}(P, P')$ comporte un terme en $\delta(\omega - \omega')$: nous posons donc :

$$\widehat{\gamma}(P, P') = \widehat{\gamma}_1(P, P') + \widehat{\gamma}_2(k, k', \omega)\,\delta(\omega - \omega')\,\delta_{\sigma\sigma'} \tag{5.24}$$

où $\widehat{\gamma}_1(P, P')$ est une fonction régulière pour $\omega = \omega'$. $\widehat{\gamma}_2$ est d'ordre n_i, comme I_2.

En séparant les facteur $\delta(\omega - \omega')$, nous pouvons décomposer (5.15) en deux équations. A l'ordre dominant en n_i (ou en Γ/E_f), nous obtenons :

$$\widehat{\gamma}_1(P, P') = I^0(P, P') + \sum_{P''} I^0(P, P'')\,[G^0(p'')]^2\,\widehat{\gamma}_1(P'', P'). \tag{5.25}$$

$$\widehat{\gamma}_2(k, k', \omega) = I_2(k, k', \omega) = \frac{1}{\Omega} n_i \,|\, t(k, k', \omega) \,|^2. \tag{5.26}$$

On montre de même que les équations (5.16) et (5.20) se réduisent à :

$$\widehat{\Lambda}(\mathrm{P}) = h(\kappa) + \sum_{\mathrm{P}'} \mathrm{I}^0(\mathrm{P}, \mathrm{P}')\,[\mathrm{G}^0(p')]^2\,\widehat{\Lambda}(\mathrm{P}'). \tag{5.27}$$

$$\widehat{\mathrm{S}}_{\mu\nu} = \sum_{\mathrm{P}'} \lambda_\mu(\kappa')\,[\mathrm{G}^0(p')]^2\,\widehat{\Lambda}_\nu(\mathrm{P}'). \tag{5.28}$$

Les fonctions $\widehat{\gamma}_1$, $\widehat{\Lambda}$, $\widehat{\mathrm{S}}_{\mu\nu}$ peuvent s'évaluer par comparaison avec le système pur. Dans ce cas R^0 et γ^0 sont fonctions du rapport $r = q/\varepsilon$; (5.13) s'écrit :

$$\gamma^0(\mathrm{P}, \mathrm{P}', r) = \mathrm{I}^0(\mathrm{P}, \mathrm{P}') + \sum_{\mathrm{P}''} \mathrm{I}^0(\mathrm{P}, \mathrm{P}'')\,\{\,[\mathrm{G}^0(p'')]^2 + \mathrm{R}^0(p'', r)\,\}\,\gamma^0(\mathrm{P}'', \mathrm{P}', r).$$

Un coup d'œil à (5.12) montre que pour $r = \infty$, cette équation se réduit à (5.25). Par conséquent :

$$\widehat{\gamma}_1(\mathrm{P}, \mathrm{P}') = \gamma^0(\mathrm{P}, \mathrm{P}', \infty). \tag{5.29a}$$

De même, si on désigne par $\Lambda^0(\mathrm{P}, r)$ et $\mathrm{S}^0_{\mu\nu}(r)$ les opérateurs de couplage et fonctions de corrélation relatifs au système pur, on trouve :

$$\widehat{\Lambda}(\mathrm{P}) = \Lambda^0(\mathrm{P}, \infty). \tag{5.29b}$$

$$\widehat{\mathrm{S}}_{\mu\nu} = \mathrm{S}^0_{\mu\nu}(\infty). \tag{5.29c}$$

Les limites pour $r = \infty$ de γ^0, Λ^0_μ, $\mathrm{S}^0_{\mu\nu}$ sont connues. « Sur la surface de Fermi », c'est-à-dire lorsque $\omega = \varepsilon_k = \mu$, on a :

$$\gamma^0(\mathrm{P}, \mathrm{P}', \infty) = \frac{1}{2i\pi z^2}\,\bar{f}(\kappa, \kappa') \tag{5.30}$$

où $\bar{f}$ est l'interaction « locale » entre quasi-particules définie par (1.13). D'autre part, on peut établir, à l'aide d'identités de Ward, les relations suivantes :

$$\begin{cases} \Lambda^0_\alpha(\mathrm{P}, \infty) = \dfrac{1}{z}\,v_{k_\alpha} = \dfrac{1}{z}\,\dfrac{k_\alpha}{m}\,\dfrac{1}{1 + \mathrm{F}^s_1/3} \\ \Lambda^0_4(\mathrm{P}, \infty) = \dfrac{1}{z}\,\dfrac{1}{1 + \mathrm{F}^s_0} \qquad \Lambda^0_5(\mathrm{P}, \infty) = \dfrac{1}{z}\,\dfrac{\sigma}{1 + \mathrm{F}^a_0} \end{cases} \tag{5.31}$$

$$\begin{cases} \mathrm{S}^0_{4\nu}(\infty) = -2i\pi\nu(0)\,\dfrac{1}{1 + \mathrm{F}^s_0}\,\delta_{\nu 4} \qquad \mathrm{S}^0_{5\nu}(\infty) = -2i\pi\nu(0)\,\dfrac{\sigma^2}{1 + \mathrm{F}^a_0}\,\delta_{\nu 5} \\ \mathrm{S}^0_{\alpha\beta}(\infty) = -2i\pi\,\dfrac{\mathrm{N}}{m}\,\delta_{\alpha\beta} \end{cases} \tag{5.32}$$

où F_0^s, F_0^a, F_1^s sont les composantes de l'interaction de Landau entre quasi-particules définies au chapitre I[er].

3° **Équations de Bethe-Salpeter à la surface de Fermi.** — Utilisant les résultats du paragraphe précédent et la définition (5.11) de $R(p, \varpi)$, nous réécrivons les équations (5.18) et (5.21) sous la forme :

$$\Lambda(P, \varpi) = \widehat{\Lambda}(P) + \sum_{K'} \frac{2i\pi z^2\, \delta(\varepsilon_{k'} - \mu)}{2i\Gamma + \varepsilon - v_{k'} \cdot q} \int_{\mu-\varepsilon/2}^{\mu+\varepsilon/2} d\omega' \Lambda(P', \varpi) \times [\widehat{\gamma_1}(P, P') + I_2(k, k', \omega)\, \delta_{\sigma\sigma'}\, \delta(\omega - \omega')] \tag{5.33}$$

$$S_{\mu\nu}(\varpi) = \widehat{S}_{\nu\mu} + \sum_{K'} \frac{2i\pi z^2\, \delta(\varepsilon_{k'} - \mu)}{2i\Gamma + \varepsilon - v_{k'} \cdot q} \int_{\mu-\varepsilon/2}^{\mu+\varepsilon/2} d\omega' \widehat{\Lambda}_\mu(P')\, \Lambda_\nu(P', \varpi). \tag{5.34}$$

Considérons d'abord les opérateurs de couplage. Dans (5.33), le terme contenant le facteur $\delta(\omega - \omega')$ est nul si $|\omega - \mu| > \varepsilon/2$. $\Lambda(P, \varpi)$, comme $\pi(p, \varpi)$, est donc discontinu pour $\omega = \mu \pm \varepsilon/2$. Posons :

$$\Lambda(P, \varpi) = \Lambda^1(P, \varpi) + \Lambda^2(P, \varpi)\, y(\omega, \varepsilon) \tag{5.35}$$

où $y(\omega, \varepsilon)$ est la fonction « créneau » définie par (5.9). $\Lambda^1(P, \varpi)$ est une fonction régulière de ω. En écrivant l'équation (5.33) pour $|\omega - \mu| > \varepsilon/2$ et $|\omega - \mu| < \varepsilon/2$, on obtient deux équations couplées en Λ^1 et Λ^2 :

$$\Lambda^1(P, \varpi) = \widehat{\Lambda}(P) + \sum_{K'} \frac{2i\pi z^2\, \delta(\varepsilon_{k'} - \mu)}{2i\Gamma + \varepsilon - v_{k'} \cdot q} \int_{\mu-\varepsilon/2}^{\mu+\varepsilon/2} d\omega' \widehat{\gamma_1}(P, P') [\Lambda^1(P', \varpi) + \Lambda^2(P', \varpi)] \tag{5.36}$$

$$\Lambda^2(P, \varpi) = \sum_{K'} \frac{2i\pi z^2\, \delta(\varepsilon_{k'} - \mu)}{2i\Gamma + \varepsilon - v_{k'} \cdot q} I_2(k, k', \omega)\, [\Lambda^1(K'\omega, \varpi) + \Lambda^2(K'\omega, \varpi)]\, \delta_{\sigma\sigma'}. \tag{5.37}$$

A des termes d'ordre Γ/E_f ou ε/E_f près, les fonctions $\widehat{\gamma_1}$, $\widehat{\Lambda}$, I_2, Λ^1, Λ^2 sont constantes sur un intervalle d'énergie ε. L'intégration sur ω' dans (5.36) donne simplement un facteur ε.

Sur la surface de Fermi, les relations (5.36) et (5.37) prennent une forme particulièrement simple; supposons le système *isotrope* et posons :

$$\widehat{\gamma_1}(P, P')\Big|_{\substack{\varepsilon_k = \varepsilon_{k'} = \mu \\ \omega = \omega' = \mu}} = \frac{1}{2i\pi z^2} \overline{f}(\widehat{k}\sigma, \widehat{k}'\sigma') = \frac{1}{2i\pi z^2 \nu(0)} \overline{F}(\widehat{k}\sigma, \widehat{k}'\sigma')$$

$$I_2(k, k', \omega)\Big|_{\varepsilon_k = \varepsilon_{k'} = \omega = \mu} = \frac{2}{\pi\nu(0) z^2} J(\widehat{k}, \widehat{k}') \tag{5.38}$$

$$\Lambda(P, \varpi)\Big|_{\varepsilon_k = \omega = \mu} = \Lambda(\widehat{k}\sigma, \varpi)$$

où $\nu(0) = m^* k_f \Omega/\pi^2$ est la densité d'états à la surface de Fermi et $\hat{k}$ dénote la direction de k. Après intégration sur ω' et $\varepsilon_{k'}$, (5.36) et (5.37) donnent :

$$\Lambda^1(\hat{k}\sigma, \varpi) = \hat{\Lambda}(\hat{k}\sigma) + \frac{1}{2}\sum_{\sigma'}\int \frac{d\hat{k}'}{4\pi} \frac{\varepsilon \bar{F}(\hat{k}\sigma, \hat{k}'\sigma')}{(2i\Gamma + \varepsilon - v_{k'}.q)}$$

$$[\Lambda^1(\hat{k}'\sigma', \varpi) + \Lambda^2(\hat{k}'\sigma', \varpi)] \quad (5.39)$$

$$\Lambda^2(\hat{k}\sigma, \varpi) = 2i\int \frac{d\hat{k}'}{4\pi} \frac{J(\hat{k}, \hat{k}')}{(2i\Gamma + \varepsilon - v_{k'}.q)} [\Lambda^1(\hat{k}'\sigma, \varpi) + \Lambda^2(\hat{k}'\sigma, \varpi)]. \quad (5.40)$$

Les équations (5.39) et (5.40) permettent de déterminer, connaissant $\hat{\Lambda}$, les différentes limites de Λ lorsque q, ε, Γ tendent vers zéro.

La même analyse s'applique aux fonctions de corrélation. En écrivant Λ_ν sous la forme (5.35) et en intégrant sur ω' et $\varepsilon_{k'}$, on obtient à partir de (5.34) la relation :

$$S_{\mu\nu}(\varpi) = \hat{S}_{\mu\nu} + i\pi\nu(0)z^2 \sum_{\sigma'}\int \frac{d\hat{k}'}{4\pi} \frac{\varepsilon \hat{\Lambda}_\mu(\hat{k}'\sigma')[\Lambda^1_\nu(\hat{k}'\sigma', \varpi) + \Lambda^2_\nu(\hat{k}'\sigma', \varpi)]}{(2i\Gamma + \varepsilon - v_{k'}.q)} \quad (5.41)$$

IV. — Les différentes limites de Λ_μ à la surface de Fermi

Nous nous limitons maintenant à l'étude des opérateurs Λ_μ, correspondant au choix :

$$h(\kappa) = \lambda_\mu(\kappa).$$

Comme au chapitre I[er], nous posons :

$$\bar{F}(\hat{k}\sigma, \hat{k}'\sigma') = \bar{F}^s(\hat{k}, \hat{k}') + \bar{F}^a(\hat{k}, \hat{k}') \text{ signe } (\sigma\sigma'). \quad (5.42)$$

Pour $\mu = \alpha$ et $\mu = 4$, λ_μ, $\hat{\Lambda}_\mu$, Λ_μ ne dépendent pas du spin σ et les équations (5.39) correspondantes contiennent seulement $\bar{F}^s$. Pour $\mu = 5$, λ_5, $\hat{\Lambda}_5$, Λ_5 sont proportionnels à σ : l'équation (5.39) contient seulement $\bar{F}^a$. Nous pouvons donc écrire l'équation (5.39) sous la forme :

$$\Lambda^1_\mu(\hat{k}\sigma, \varpi) = \hat{\Lambda}_\mu(\hat{k}\sigma) + \int \frac{d\hat{k}'}{4\pi} \frac{\varepsilon \bar{F}^\mu(\hat{k}, \hat{k}')}{2i\Gamma + \varepsilon - v_{k'}.q} \left(\Lambda^1_\mu(\hat{k}'\sigma, \varpi) + \Lambda^2_\mu(\hat{k}'\sigma, \varpi)\right) \quad (5.43)$$

où :

$$\bar{F}^\mu = \begin{cases} \bar{F}^s \text{ pour } \mu = 1 \text{ à } 4 \\ \bar{F}^a \text{ pour } \mu = 5. \end{cases}$$

Supposons d'autre part, le système isotrope : $\bar{F}(\hat{k}, \hat{k}')$ et $J(\hat{k}, \hat{k}')$ ne dépendent que de l'angle ξ entre k et k'. On peut les développer en série de polynômes de Legendre :

$$\bar{F}^{s,a}(\cos \xi) = \sum_l \bar{F}_l^{s,a} P_l(\cos \xi). \tag{5.44}$$

De l'équation (1.13), nous déduisons la relation :

$$\left(1 - \frac{\bar{F}_l^{s,a}}{2l+1}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{F_l^{s,a}}{2l+1}\right) = \beta_l^{s,a}. \tag{5.45}$$

Nous écrivons de même J sous la forme :

$$J(\cos \xi) = \sum_l \Gamma_l P_l(\cos \xi). \tag{5.46}$$

Un coup d'œil à (4.44) et (5.23) montre que le premier coefficient Γ_0 est identique à Γ :

$$\Gamma = \int \frac{d\hat{k}'}{4\pi} J(\hat{k}, \hat{k}'). \tag{5.47}$$

1° **La limite** $\varepsilon = 0$. — La fonction $y(\omega, 0)$ est identiquement nulle ; d'après (5.39) et (5.29) on a :

$$\lim_{\varepsilon=0} \Lambda_\mu(\hat{k}\sigma, \varpi) = \lim_{\varepsilon=0} \Lambda_\mu^1(\hat{k}\sigma, \varpi) = \hat{\Lambda}_\mu(\hat{k}\sigma) = \Lambda_\mu^0(\hat{k}\sigma, \infty).$$

Le résultat est indépendant du rapport qv_f/Γ et identique à la limite $r = \infty$ du système pur, donnée par (5.31).

2° **Les limites** $\Gamma = 0$. — Ce sont les limites $\Lambda_\mu^0(\hat{k}\sigma, r)$ relatives au système pur. En faisant $\Gamma = J = 0$ dans (5.43), on obtient :

$$\Lambda_\mu^0(\hat{k}\sigma, r) = \Lambda_\mu^0(\hat{k}\sigma, \infty) + \int \frac{d\hat{k}'}{4\pi} \frac{\bar{F}_\mu(\hat{k}, \hat{k}')}{1 - v_{k'} \cdot r} \Lambda_\mu^0(\hat{k}'\sigma, r). \tag{5.48}$$

En général, on ne sait pas résoudre (5.48), sauf lorsque $r = 0$. Dans ce cas, on vérifie que :

$$\Lambda^0(\hat{k}\sigma, 0) = \Lambda_\alpha^0(\hat{k}\sigma, \infty)\beta_1^s = \frac{1}{z}\frac{k_\alpha}{m} \tag{5.49a}$$

$$\Lambda_4^0(\hat{k}\sigma, 0) = \Lambda_4^0(\hat{k}\sigma, \infty)\beta_0^s = \frac{1}{z} \tag{5.49b}$$

$$\Lambda_5^0(\hat{k}\sigma, 0) = \Lambda_5^0(\hat{k}\sigma, \infty)\beta_0^a = \frac{\sigma}{z}. \tag{5.49c}$$

Les résultats (5.49) peuvent s'obtenir directement à l'aide d'autres identités de Ward.

3° **Calcul de Λ_μ lorsque $qv_f/\Gamma \ll 1$.** — On peut obtenir une solution sous forme de développement en puissances de qv_f/Γ. Le calcul est ébauché dans l'appendice B. A l'ordre le plus bas en qv_f/Γ, les résultats s'expriment simplement en fonction des coefficients $\beta_{0,1}^{s,a}$ et $\Gamma_{0,1}$ introduits plus haut ; on trouve :

$$z\Lambda_{//} = \frac{(k_{//}/m)(\beta_1^s)^{-1}(\varepsilon(\varepsilon\beta_1^s + i/\tau) - s^2q^2) + \varepsilon s^2 q(1 - 1/\beta_0^s)}{\varepsilon(\varepsilon + i/\tau) - s^2q^2} + 2iy(\omega, \varepsilon)\left[\frac{(\varepsilon\Gamma_1/3)(k_{//}/m) + \Gamma s^2 q}{\varepsilon(\varepsilon + i/\tau) - s^2q^2}\right] \tag{5.50}$$

$$z\Lambda_\perp = \frac{(k_\perp/m)[(\beta_1^s)^{-1} - i\varepsilon\tau]}{1 - i\varepsilon\tau} + 2y(\omega, \varepsilon)\frac{(\tau\Gamma_1/3)(k_\perp/m)}{1 - i\varepsilon\tau}$$

(où $\Lambda_{//}$ et $k_{//}$ désignent respectivement les composantes Λ_α et k_α parallèles à q, $\Lambda_\perp$ et $k_\perp$ les composantes perpendiculaires à q) :

$$z\Lambda_4 = \frac{\varepsilon(\varepsilon + i/\tau) - s^2q^2/\beta_0^s + \varepsilon v_k.q(\beta_1^s - 1)}{\varepsilon(\varepsilon + i/\tau) - s^2q^2} + 2iy(\omega, \varepsilon)\left[\frac{\Gamma(\varepsilon + i/\tau) + (\Gamma_1/3)\beta_1^s v_k.q}{\varepsilon(\varepsilon + i/\tau) - s^2q^2}\right] \tag{5.51}$$

$$z\Lambda_5 = \sigma\frac{\varepsilon(\varepsilon + i/\tau_\sigma) - s_\sigma^2q^2/\beta_0^a + \varepsilon v_k.q(\beta_1^a - 1)}{\varepsilon(\varepsilon + i/\tau_\sigma) - s_\sigma^2q^2} + 2iy(\omega, \varepsilon)\sigma\left[\frac{\Gamma(\varepsilon + i/\tau_\sigma) + (\Gamma_1/3)\beta_1^a v_k.q}{\varepsilon(\varepsilon + i/\tau_\sigma) - s_\sigma^2q^2}\right] \tag{5.52}$$

s, s_σ, τ, τ_σ sont donnés par :

$$\begin{aligned} s^2 &= (v_f^2/3)\beta_0^s\beta_1^s \qquad & 1/\tau &= 2\left(\Gamma - \frac{\Gamma_1}{3}\right)\beta_1^s \\ s_\sigma^2 &= (v_f^2/3)\beta_0^a\beta_1^a \qquad & 1/\tau_\sigma &= 2\left(\Gamma - \frac{\Gamma_1}{3}\right)\beta_1^a. \end{aligned} \tag{5.53}$$

Supposons qu'on fasse tendre q/Γ et ε/Γ vers zéro, en maintenant le rapport $q/\varepsilon = r$ constant. Λ_μ tend vers une limite $\Lambda_\mu^\Gamma(r)$ qui est fonction de r. Il est intéressant de comparer $\Lambda_\mu^\Gamma(r)$ avec la limite du système pur $\Lambda_\mu^0(r)$, obtenue en faisant tendre Γ/q et Γ/ε vers zéro à r constant. En remarquant que $y(\omega, \varepsilon)$ tend vers $\varepsilon\delta(\omega - \mu)$, on obtient les résultats du tableau I. On voit que la limite $r = 0$ dans un système impur correspond à la limite $r = \infty$ dans un système pur (point déjà souligné par Langer [*17*]), sauf pour les opérateurs de couplage scalaire (charge et spin). Dans ce dernier cas, il apparaît un terme singulier à la surface de Fermi ($\omega = \mu$). Le rôle particulier joué par Λ_4 et Λ_5 tient à la conservation de la charge et du spin dans les collisions sur les impuretés.

TABLEAU I

	$z\Lambda_\mu^\Gamma(0)$	$z\Lambda_\mu^0(0)$	$z\Lambda_\mu^\Gamma(\infty)$	$z\Lambda_\mu^0(\infty)$
$\mu = \alpha$	k_α/m^*	k_α/m	k_α/m^*	k_α/m^*
$\mu = 4$	$1 + 2i\Gamma\delta(\omega - \mu)$	1	$1/\beta_0^s$	$1/\beta_0^s$
$\mu = 5$	$\sigma(1 + 2i\Gamma\delta(\omega - \mu))$	σ	σ/β_0^a	σ/β_0^a

4° **Relation de continuité.** — Avant de quitter les opérateurs de couplage, nous mentionnerons une dernière relation, dite de « continuité », reliant Λ_4 à Λ_α :

$$\sum_\alpha q_\alpha(\Lambda_\alpha(\widehat{k\sigma}, \varpi) - \Lambda_\alpha^\Gamma(\infty)) = \varepsilon(\Lambda_4(\widehat{k\sigma}, \varpi) - \Lambda_4^\Gamma(0)) \qquad (5.54)$$

qui se décompose en fait en deux relations, concernant respectivement Λ^1 et Λ^2 :

$$\sum_\alpha q_\alpha\left(\Lambda_\alpha^1(\widehat{k\sigma}, \varpi) - \frac{1}{z} v_{k_\alpha}\right) = \varepsilon\left(\Lambda_4^1(\widehat{k\sigma}, \varpi) - \frac{1}{z}\right). \qquad (5.54a)$$

$$\sum_\alpha q_\alpha(\Lambda_\alpha^2(\widehat{k\sigma}, \varpi)) = \varepsilon\left(\Lambda_4^2(\widehat{k\sigma}, \varpi) - \frac{2i\Gamma}{\varepsilon z}\right). \qquad (5.54b)$$

Pour établir (5.54), il suffit de combiner les équations (5.39-5.40) correspondant à $\mu = \alpha$ et $\mu = 4$ et d'utiliser les résultats relatifs à $\Lambda^{\Gamma}_{\mu}(0)$, $\Lambda^{\Gamma}_{\mu}(\infty)$ et $\widehat{\Lambda}_{\mu}$.

5° **Identités de Ward pour un système impur.** — Il existe pour un système pur deux séries d'identités de Ward.

a) La première série fait intervenir les dérivées partielles de M^0 par rapport à k et ω :

$$\Lambda^0_{\alpha}(P, \infty) = \frac{k_{\alpha}}{m} - \frac{\partial M^0(P)}{\partial k_{\alpha}}. \tag{5.55}$$

$$\Lambda^0_4(P, 0) = 1 + \frac{\partial M^0(P)}{\partial \omega} \qquad \Lambda^0_5(P, 0) = \sigma\left(1 + \frac{\partial M^0(P)}{\partial \omega}\right). \tag{5.56}$$

Les collisions sur les impuretés conservant l'énergie ω, le spin σ et « en moyenne » le vecteur d'onde k, la démonstration qui conduit aux relations (5.55) et (5.56) [*1*] reste valable pour un système impur. Il suffit dans ces relations de remplacer Λ^0_{μ} et M^0 respectivement par Λ^{Γ}_{μ} et M. De fait, nos résultats confirment ces identités : écrivons M sous la forme :

$$M(k, \omega) = M^0(k, \omega) + \frac{i\Gamma}{z} \text{ signe } (\omega - \mu) \tag{5.57}$$

en négligeant comme précédemment la partie réelle de $M^{(1)}$. A l'aide des résultats du tableau I, on vérifie que les nouvelles identités de Ward sont satisfaites.

b) La deuxième série d'identités de Ward pour un système pur s'écrit :

$$\Lambda^0_{\alpha}(P, 0) = \frac{k_{\alpha}}{m} - \frac{dM^0(P)}{dk_{\alpha}} \tag{5.58}$$

$$\Lambda^0_4(P, \infty) = 1 + \frac{dM^0(P)}{d\mu} \qquad \Lambda^0_5(P, \infty) = \sigma + \frac{dM^0(P)}{d\mu_{\sigma}}. \tag{5.59}$$

— Considérons d'abord les identités (5.59) : $\frac{dM^0}{d\mu}$ $\left(\text{ou } \frac{dM^0}{d\mu_{\sigma}}\right)$ représente la variation de M^0 lorsqu'on modifie simultanément ω et μ de la même quantité $d\mu$ (ou $\sigma d\mu$). Dans les deux cas, la transformation laisse inchangés tous les facteurs $i\Gamma$ signe $(\omega - \mu)$ figurant au dénominateur des fonctions de Green. Les impuretés ne jouent donc aucun rôle, essentiellement parce que les collisions conservent l'énergie et le spin. (5.59) reste valable pour un système impur, comme le montrent d'ailleurs les résultats du tableau I.

— Examinons enfin l'identité (5.58) : dM^0/dk_α représente la variation de M^0 lors d'une translation simultanée du vecteur d'onde k et de la surface de Fermi S_f. Le deuxième membre de (5.58) est proportionnel au courant transporté par la particule k. En présence d'impuretés, la surface de Fermi dans l'espace des k n'est pas définie : un état où S_f est déplacée n'est pas stationnaire (ce qui revient à dire que le courant n'est pas conservé). *On ne peut donc pas dériver une relation analogue à* (5.58) *pour un système impur.*

V. — Les différentes limites des fonctions de corrélation

On calcule $S_{\mu\nu}$ en insérant dans l'équation (5.41) les résultats obtenus pour Λ^1 et Λ^2.

1° **La limite** $\varepsilon = 0$. — $\lim_{\varepsilon=0} S_{\mu\nu}(\varpi) = \widehat{S}_{\mu\nu} = S^0_{\mu\nu}(\infty)$.

C'est la limite $r = \infty$ du système pur, donnée par (5.32).

2° **Les limites** $\Gamma = 0$. — Elles correspondent au système pur. Pour $r = 0$, on a :

$$S^0_{\mu\nu}(0) = 0. \tag{5.60}$$

3° **Calcul de** $S_{\mu\nu}$ **lorsque** $qv_f/\Gamma \ll 1$. — On résout l'équation (5.41) de la même manière que (5.39) et (5.40). On trouve pour $qv_f \ll \Gamma$:

$$S_{44} = \frac{2i\pi N}{m} \frac{q^2}{\varepsilon(\varepsilon + i/\tau) - s^2q^2} \qquad S_{55} = \frac{2i\pi N}{m} \frac{\sigma^2 q^2}{\varepsilon(\varepsilon + i/\tau_\sigma) - s_\sigma^2 q^2} \tag{5.61a}$$

$$S_{\alpha 4} = \frac{2i\pi N}{m} \frac{\varepsilon q_\alpha}{\varepsilon(\varepsilon + i/\tau) - s^2q^2} \qquad S_{\alpha 5} = S_{45} = 0 \tag{5.61b}$$

$$S_{\alpha\beta} = \frac{2i\pi N}{m} \left[\frac{\delta_{\alpha\beta}}{1 - i\varepsilon\tau} + \frac{\varepsilon s^2 q_\alpha q_\beta}{(\varepsilon + i/\tau)[\varepsilon(\varepsilon + i/\tau) - s^2q^2]} \right]. \tag{5.61c}$$

So $S^\Gamma_{\mu\nu}(r)$ la limite de $S_{\mu\nu}$ obtenue en faisant tendre q/Γ et ε/Γ vers zéro à r constant. On vérifie aisément que :

$$\begin{aligned} S^\Gamma_{\mu\nu}(0) &= S^0_{\mu\nu}(0) \qquad \text{sauf pour } \mu = \nu = \alpha \\ S^\Gamma_{\alpha\alpha}(0) &= S^0_{\alpha\alpha}(\infty) \\ S^\Gamma_{\mu\nu}(\infty) &= S^0_{\mu\nu}(\infty). \end{aligned} \tag{5.62}$$

4° **Relations de continuité.** — En combinant (5.41) et (5.39-5.40) et à l'aide de (5.32), on obtient les relations suivantes :

$$\varepsilon S_{44} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} S_{\alpha 4} \tag{5.63}$$

$$\varepsilon S_{4\beta} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \left(S_{\alpha\beta} + \frac{2i\pi N}{m} \delta_{\alpha\beta} \right). \tag{5.64}$$

Ces équations de « continuité » expriment la conservation de la charge.

CHAPITRE VI

L'ÉQUATION DE TRANSPORT

I. — Réponse du système à un champ extérieur

1° **Formulation du problème.** — Nous cherchons la réponse du système à un champ extérieur périodique, de vecteur d'onde q et de fréquence ε, caractérisé par l'hamiltonien :

$$H_e = \sum_{K'} h(K') a^{+}_{K'+q/2} a_{K'-q/2} e^{-i\varepsilon t} + \text{c. c.} \tag{4.55}$$

Cette perturbation modifie la fonction d'onde de l'état fondamental, $| \varphi_0 \rangle$, qui devient égale à $| \varphi \rangle$. Nous nous limitons à la réponse *linéaire* du système : il suffit donc de calculer $| \varphi \rangle$ au premier ordre en H_e.

La réponse « physique » du système au champ extérieur H_e fait intervenir des valeurs moyennes de type :

$$\langle B(K) \rangle = \langle \varphi | a^{+}_{K-q/2} a_{K+q/2} | \varphi \rangle. \tag{6.1}$$

Un calcul de perturbation « à la Kubo » conduit au résultat classique :

$$\langle B(K) \rangle = i \int_{-\infty}^{t} e^{-i\varepsilon t'} dt' \sum_{K'} h(K') \langle \varphi_0 | [a^{+}_{K'+q/2}(t') a_{K'-q/2}(t'), a^{+}_{K-q/2}(t) a_{K+q/2}(t)] | \varphi_0 \rangle \tag{6.2}$$

où $|\varphi\rangle$ est l'état de base du système en l'absence de champ extérieur. Les opérateurs a et a^+ figurant dans (6.2) sont écrits en représentation d'Heisenberg pour le système isolé. On peut transformer (6.2) de manière à obtenir un produit chronologique. A température nulle et pour $\varepsilon > 0$, on vérifie que :

$$\langle B(K)\rangle = -ie^{-i\varepsilon t}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\varepsilon t''}dt'' \sum_{K'} h(K')$$
$$\times\langle \varphi_0 | T\{a^+_{K-q/2}\, a_{K+q/2}\, a^+_{K'+q/2}(t'')\, a_{K'-q/2}(t'')\}| \varphi_0\rangle. \qquad (6.3)$$

Nous voyons que $\langle B(K)\rangle$ ne fait intervenir que la fonction de Green à deux particules. En utilisant la définition (4.56), nous obtenons la relation simple :

$$\langle B(K)\rangle = \frac{1}{2\pi i} e^{-i\varepsilon t}\int d\omega \Delta(P,\varpi). \qquad (6.4)$$

En général le champ extérieur se couple à l'une des quantités *conservées* par l'interaction entre les particules : la densité de charge, la densité de spin ou la densité de courant. Nous désignons par $\rho(q)$, $\rho_s(q)$, $J(q)$ les composantes de Fourier respectives de ces densités et nous posons :

$$d_\mu(q) = \begin{cases} \rho(q) = \sum_K a^+_{K-q/2}\, a_{K+q/2} & \text{si } \mu = 4 \\ \rho_s(q) = \sum_K \sigma a^+_{K-q/2}\, a_{K+q/2} & \text{si } \mu = 5 \\ J_\alpha(q) = \sum_K \frac{k_\alpha}{m} a^+_{K-q/2}\, a_{K+q/2} & \text{si } \mu = \alpha\ (1,2,3) \end{cases} \qquad (6.5)$$

(6.5) peut s'écrire sous la forme :

$$d_\mu(q) = \sum_K \lambda_\mu(K) a^+_{K-q/2}\, a_{K+q/2} \qquad (6.6)$$

où $\lambda_\mu(K)$ est donné par (4.60). La réponse à une perturbation $hd_\mu(q)$ fait donc intervenir la quantité $h\Delta_\mu$, où Δ_μ est la fonction étudiée au chapitre IV. Le résultat général (6.4) permet de calculer la valeur moyenne des densités de charge, de spin et de courant du système. Pour une perturbation du type $hd_\mu(q)$, on vérifie que :

$$\langle d_\nu(q)\rangle = \frac{h}{2\pi i} e^{-i\varepsilon t}\sum_P \lambda_\nu(K)\Delta_\mu(P,\varpi). \qquad (6.7)$$

A un facteur numérique près, (6.7) n'est autre que la fonction de corrélation $S_{\nu\mu}(\varpi)$ introduite au chapitre IV et définie par (4.61).

2° **Application : constante diélectrique et conductivité électrique d'un gaz d'électrons.** — Considérons un système d'électrons soumis à une charge « test » extérieure r_q. H_e est donné par :

$$H_e = \frac{1}{\Omega}\frac{4\pi e^2}{q^2} r_q \rho(-q) e^{-i\varepsilon t} + \text{c. c.}$$

La densité de charge induite $\langle \rho(q) \rangle$ vaut dans ce cas :

$$\langle \rho(q) \rangle = \frac{1}{2\pi i\Omega}\frac{4\pi e^2}{q^2} r_q S_{44}(\varpi) e^{-i\varepsilon t}. \tag{6.8}$$

Nous avons vu que pour un système chargé, S_{44} pouvait s'écrire :

$$S_{44}(\varpi) = \frac{\tilde{S}_{44}(\varpi)}{1 - \frac{1}{2i\pi\Omega}\left(\frac{4\pi e^2}{q^2}\tilde{S}_{44}(\varpi)\right)} \tag{6.9}$$

où $\tilde{S}_{44}(\varpi)$ est donné par la contribution des diagrammes propres. La constante diélectrique du système est donnée par :

$$\frac{1}{\mathcal{E}(\varpi)} = \frac{\langle \rho(q) \rangle + r_q e^{-i\varepsilon t}}{r_q e^{-i\varepsilon t}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2\pi i\Omega}\left(\frac{4\pi e^2}{q^2}\tilde{S}_{44}(\varpi)\right)}. \tag{6.10}$$

Nous avons, au chapitre V, calculé différentes limites de $\tilde{S}_{44}$ correspondant au cas où qv_f, ε, Γ sont petits devant l'énergie de Fermi. En reportant les expressions trouvées pour $\tilde{S}_{44}$ dans (6.10), on retrouve exactement les résultats obtenus par la méthode de Landau au chapitre II (en particulier, dans la limite $qv_f \ll \Gamma$ l'équation (2.13)).

— Supposons maintenant le système d'électrons soumis à un champ électromagnétique de potentiel vecteur A :

$$H_e = -\frac{e}{\Omega c} A . J(q) e^{-i\varepsilon t} + \text{c. c.}$$

Le champ électrique est donné par $E = -\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}$.

De la relation (6.7) nous tirons l'expression du courant paramagnétique :

$$J^p_\alpha = -\frac{e}{2\pi i\Omega c} e^{-i\varepsilon t} \sum_\beta S_{\alpha\beta} A_\beta.$$

A ce terme il convient d'ajouter le courant diamagnétique :

$$J_\alpha^d = \frac{Ne}{mc\Omega} A_\alpha$$

on trouve ainsi pour la conductivité :

$$\sigma_{\alpha\beta}(\varpi) = \frac{e^2}{2\pi\Omega\varepsilon}\left(S_{\alpha\beta}(\varpi) + \frac{2\pi i N}{m}\delta_{\alpha\beta}\right). \tag{6.11}$$

Ici encore nous retrouvons exactement les résultats obtenus au chapitre II par la méthode de Landau, en utilisant les différentes limites de $\tilde{S}_{\alpha\beta}$ calculées au chapitre V et en reportant dans (4.66) et (6.11).

II. — Définition de la « densité de quasi-particules » $n(K)$. Expression de $\delta n(K)$ et $\bar{\delta} n(K)$ en fonction des opérateurs de couplage

Jusqu'à présent, nous n'avons pas précisé la structure des quasi-particules. A cet effet, considérons l'état $a_K^+(t) \mid \varphi_0 \rangle$ et cherchons son spectre de fréquences. Il est caractérisé par la densité spectrale $A_+(K, \omega)$ de la fonction de Green $G(K, \omega)$. Cette densité spectrale présente un pic, correspondant à la quasi-particule k. En filtrant l'état $a_K^+(t) \mid \varphi_0 \rangle$ de manière à ne conserver que ce pic, nous définissons (après normalisation), l'opérateur création de la quasi-particule, $\mathcal{A}_K^+$. Cette définition est entachée d'une erreur d'ordre Γ/E_f, qui traduit l'incertitude physique due à l'amortissement de la quasi-particule.

Pour un système pur, la largeur du pic est négligeable près de la surface de Fermi. En ce cas l'état $\mathcal{A}_K^+ \mid \varphi_0 \rangle$ est un état propre, normalisé, lorsque $k > k_f$ (c'est-à-dire lorsque $A_+(K, \omega)$ possède un pic). Pour $k < k_f$, la densité spectrale n'a plus de pic : on a alors :

$$\mathcal{A}_K^+ \mid \varphi_0 \rangle = 0 \qquad (k > k_f)$$

qui exprime le principe d'exclusion. Pour un système impur, la situation est moins nette, car le pic de $A_+(K, \omega)$ conserve une largeur finie Γ même sur la surface de Fermi. Trois cas sont possibles, représentés sur la figure (VI.1) Dans le cas (a), le pic de la densité spectrale est « complet ». L'état $\mathcal{A}_K^+ \mid \varphi_0 \rangle$ est alors normalisé et représente un état propre, à une erreur d'ordre Γ/E_f près. Dans le cas (c), au contraire, le pic a complètement disparu : on a alors :

$$\mathcal{A}_K^+ \mid \varphi_0 \rangle = 0 \qquad \left(k \ll k_f - \frac{\Gamma}{v_f}\right). \tag{6.12}$$

Le cas intermédiaire (*b*) se produit dans une couche d'épaisseur Γ/v_f autour de la surface de Fermi : l'état $\alpha_K^+ \mid \varphi_0 \rangle$ n'est alors pas normalisé; on passe continûment du cas (*a*) au cas (*c*). Cette transition progressive résulte de l'incertitude sur la surface de Fermi due aux collisions sur les impuretés.

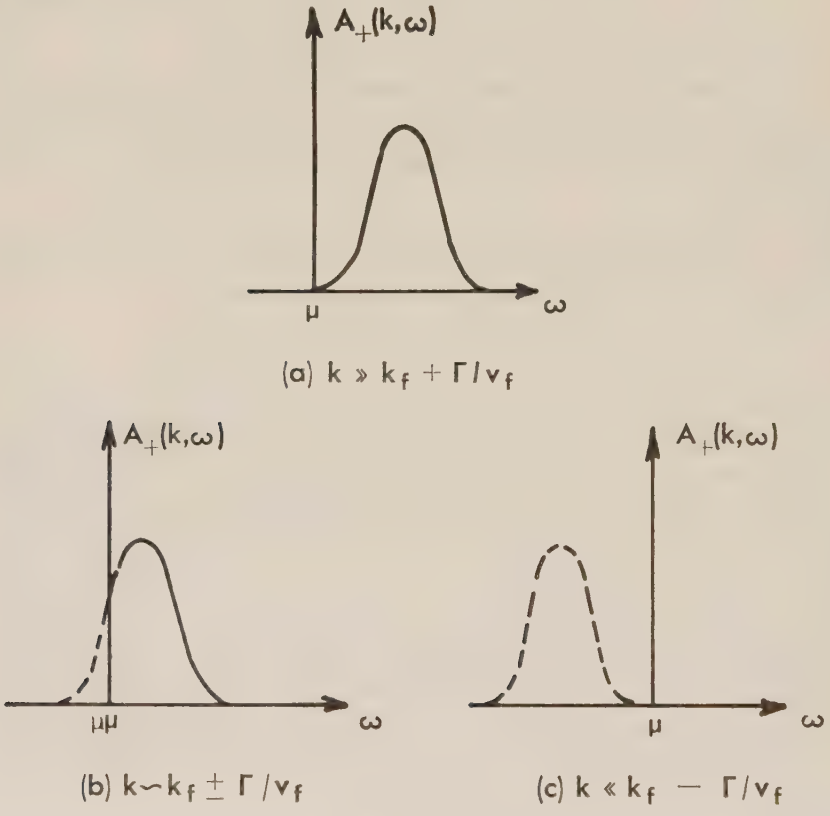

FIG. VI.1.

Dans l'esprit de la méthode semi-classique de Wigner, nous définissons la densité de quasi-particules $n(K, r, t)$ au point r, par la relation :

$$n(K, r, t) = \frac{1}{\Omega} \sum_q \alpha^+_{K-q/2}(t)\, \alpha_{K+q/2}(t) e^{iqr}. \tag{6.13}$$

Nous avons vu au premier chapitre que ceci ne viole pas le principe d'incertitude tant que $qv_f \ll E_f$. La fonction de distribution de Landau s'obtient en prenant la valeur moyenne de (6.13) dans l'état $\mid \varphi \rangle$ perturbé.

En présence d'une excitation périodique, on a :

$$n(\mathrm{K}, r, t) = n_0(k) + (\delta n(\mathrm{K})\, e^{i(qr-\varepsilon t)} + \text{c. c.})$$
$$\delta n(\mathrm{K}) = \frac{1}{\Omega} e^{i\varepsilon t} \langle \varphi \mid \mathcal{A}^{+}_{\mathrm{K}-q/2}(t)\, \mathcal{A}_{\mathrm{K}+q/2}(t) \mid \varphi \rangle. \tag{6.14}$$

En remontant à la relation (6.12), nous voyons que :

$$\delta n(\mathrm{K}) = 0 \quad \text{lorsque} \quad |\varepsilon_k - \mu| \gg \begin{cases} qv_f \\ \Gamma. \end{cases} \tag{6.15}$$

La distribution de quasi-particules n'est donc perturbée qu'au voisinage immédiat de la surface de Fermi. Pour avoir δn au premier ordre en la perturbation, nous appliquons les résultats de la section I. En remplaçant dans (6.3) $a^{+}_{\mathrm{K}-q/2}$ et $a_{\mathrm{K}+q/2}$ respectivement par $\mathcal{A}^{+}_{\mathrm{K}-q/2}$ et $\mathcal{A}_{\mathrm{K}+q/2}$, on obtient :

$$\delta n(\mathrm{K}) = -i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\varepsilon t''} dt'' \sum_{\mathrm{K}'} h(\mathrm{K}')$$
$$\times \langle \varphi_0 \mid \mathrm{T} \{ \mathcal{A}^{+}_{\mathrm{K}-q/2}\, \mathcal{A}_{\mathrm{K}+q/2}\, a^{+}_{\mathrm{K}'+q/2}(t'')\, a_{\mathrm{K}'-q/2}(t'') \} \mid \varphi_0 \rangle. \tag{6.16}$$

Par analogie avec (6.4), nous écrivons (6.16) sous la forme :

$$\delta n(\mathrm{K}) = \frac{1}{2i\pi} \int d\omega \bar{\Delta}(\mathrm{P}, \varpi). \tag{6.17}$$

On passe de la fonction $\Delta(\mathrm{P}, \varpi)$ définie par (4.56) à $\Delta(\mathrm{P}, \varpi)$ en remplaçant dans la fonction de Green à deux particules K les deux opérateurs $a^{+}_{\mathrm{K}-q/2}$ et $a_{\mathrm{K}-q/2}$ par $\mathcal{A}^{+}_{\mathrm{K}-q/2}$ et $\mathcal{A}_{\mathrm{K}+q/2}$. Nozières [*1*] a montré que lorsqu'on passe de Δ à $\bar{\Delta}$, on doit remplacer (4.57) par :

$$\bar{\Delta}(\mathrm{P}, \varpi) = \frac{1}{z_k} \Lambda(\mathrm{P}, \varpi)\, \mathrm{G}^{\mathrm{coh}}(p + \varpi/2)\, \mathrm{G}^{\mathrm{coh}}(p - \varpi/2) \tag{6.18}$$

où $\mathrm{G}^{\mathrm{coh}}$ est défini par (4.36). On obtient ainsi :

$$\delta n(\mathrm{K}) = \frac{1}{2i\pi z_k}$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Lambda(\mathrm{K}\omega, \varpi) z^{+} z^{-}\, d\omega}{[\xi^{+} - \omega^{+} - i\Gamma^{+} \operatorname{signe}(\omega + \varepsilon/2 - \mu)][\xi^{-} - \omega^{-} - i\Gamma^{-} \operatorname{signe}(\omega - \varepsilon/2 - \mu)]}. \tag{6.19}$$

Pour effectuer l'intégration sur ω, on isole comme précédemment l'intervalle $|\omega-\mu|<\varepsilon/2$. Il vient :

$$\frac{2i\pi z_k}{z^+z^-}\,\delta n(\kappa) = \int_{|\omega-\mu|>\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\Lambda^1(\kappa\omega,\varpi)d\omega}{[\xi^+-\omega^+-i\Gamma^+\,\mathrm{signe}\,(\omega-\mu)][\xi^--\omega^--i\Gamma^-\,\mathrm{signe}\,(\omega-\mu)]} + \int_{\mu-\varepsilon/2}^{\mu+\varepsilon/2} \frac{[\Lambda^1(\kappa\omega,\varpi)+\Lambda^2(\kappa\omega,\varpi)]d\omega}{(\xi^+-\omega^+-i\Gamma^+)(\xi^--\omega^-+i\Gamma^-)}. \tag{6.20}$$

Dans le deuxième terme de (6.20), nous pouvons remplacer $\Lambda^{1,2}(\kappa\omega,\varpi)$ par $\Lambda^{1,2}(\kappa\mu,\varpi)$. *A priori*, nous n'avons pas le droit de faire le même changement dans le premier terme, car les singularités de $\Lambda(\omega)$ peuvent contribuer à l'intégrale. Nous évitons cette difficulté en remarquant que d'après (6.15), $\delta n(\kappa)=0$ lorsque $|\varepsilon_k-\mu|>(qv_f,\Gamma)$. Nous *admettons* ce résultat, en remarquant qu'il implique une condition sur Λ. Dans l'intervalle :

$$|\varepsilon_k-\mu|\leqslant(qv_f,\Gamma),$$

nous allons par contre trouver un $\delta n(\kappa)$ d'ordre (-1) en $(qv_f,\varepsilon,\Gamma)$, provenant des singularités du dénominateur de (6.20). A cette échelle les variations de $\Lambda(\omega)$ ont un effet négligeable car elles s'étalent sur un large intervalle de fréquence, où les singularités du dénominateur ne se font plus sentir : la contribution correspondante est d'ordre zéro en $(qv_f,\varepsilon,\Gamma)$. On peut donc aussi remplacer $\Lambda^1(\kappa\omega,\varpi)$ par $\Lambda^1(\kappa\mu,\varpi)$ dans le premier terme de (6.20). En intégrant sur ω, il vient alors :

$$\frac{2i\pi}{z}\,\delta n(\kappa) = \frac{\Lambda^1(\kappa\mu,\varpi)}{\varepsilon-v_k.q}\,\mathrm{Log}\,\frac{\left(X^+ +\frac{\varepsilon}{2}+i\Gamma\right)\left(X^- -\frac{\varepsilon}{2}-i\Gamma\right)}{\left(X^- +\frac{\varepsilon}{2}+i\Gamma\right)\left(X^+ -\frac{\varepsilon}{2}-i\Gamma\right)} + \frac{\Lambda^1(\kappa\mu,\varpi)+\Lambda^2(\kappa\mu,\varpi)}{v_k.q-\varepsilon-2i\Gamma}\,\mathrm{Log}\,\frac{\left(X^+ +\frac{\varepsilon}{2}+i\Gamma\right)\left(X^- -\frac{\varepsilon}{2}-i\Gamma\right)}{\left(X^+ -\frac{\varepsilon}{2}+i\Gamma\right)\left(X^- +\frac{\varepsilon}{2}-i\Gamma\right)}$$

où :

$$X^\pm = \mu-\varepsilon_k\pm\frac{\varepsilon}{2}\mp\frac{v_k.q}{2}. \tag{6.21}$$

Comme prévu, les deux termes logarithmiques sont des fonctions de ε_k centrées en $\varepsilon_k=\mu$, nulles dès que $|\varepsilon_k-\mu|\gg(qv_f,\Gamma)$.

Nous avons vu au chapitre III que la forme exacte de $\delta n(\varepsilon_k)$ importe peu; la quantité que l'on mesure expérimentalement est la distribution angulaire, intégrée sur l'énergie :

$$\nu(\hat{k}, \sigma) = \int \delta n(\mathrm{K})\, d\varepsilon_k. \tag{3.30}$$

Pour établir l'équation de transport (section III), nous pouvons donc remplacer ces fonctions « élargies » par des fonctions de Dirac, en introduisant un $\widetilde{\delta n}(\mathrm{K})$ « modèle » défini par :

$$\widetilde{\delta n}(\mathrm{K}) = \nu(\hat{k}, \sigma)\, \delta(\varepsilon_k - \mu). \tag{3.35}$$

Après intégration sur ε_k, (6.21) donne :

$$\widetilde{\delta n}(\mathrm{K}) = z\delta(\varepsilon_k - \mu)\left[- \Lambda^1(\hat{k}\sigma, \varpi) + \frac{\varepsilon[\Lambda^1(\hat{k}\sigma, \varpi) + \Lambda^2(\hat{k}\sigma, \varpi)]}{2i\Gamma + \varepsilon - v_k . q}\right]. \tag{6.22}$$

Nous omettrons le « tilde » sur $\delta n(\mathrm{K})$ pour ne pas compliquer les notations. Comme au premier chapitre, nous utiliserons la quantité $\overline{\delta n}$ reliée à δn par l'équation :

$$\overline{\delta n}(\hat{k}\sigma) = \delta n(\hat{k}\sigma) + \frac{1}{2}\sum_{\sigma'}\int \frac{d\hat{k}'}{4\pi}\, \overline{\mathrm{F}}(\hat{k}\sigma, \hat{k}'\sigma')\overline{\delta n}(\hat{k}'\sigma') \tag{6.23}$$

où $\overline{\mathrm{F}}$ est la fonction définie par (5.38). $\overline{\delta n}$ peut aussi s'exprimer à l'aide des opérateurs de couplage : en combinant (5.39), (6.22) et (6.23), on trouve sans difficulté :

$$\overline{\delta n}(\mathrm{K}) = z\delta(\varepsilon_k - \mu)\left[\frac{\varepsilon[\Lambda^1(\hat{k}\sigma, \varpi) + \Lambda^2(\hat{k}\sigma, \varpi)]}{2i\Gamma + \varepsilon - v_k . q} - \Lambda^0(\hat{k}\sigma, 0)\right] \tag{6.24}$$

où $\Lambda^0(\hat{k}\sigma, 0)$ est l'opérateur de couplage du système pur pour $r = 0$.

A titre indicatif, la forme exacte de la fonction $\delta n(\varepsilon_k)$ est décrite brièvement dans la section IV, dans le cas particulier simple discuté au chapitre III (absence d'interaction, limite $\frac{q}{\Gamma}$ et $\frac{\varepsilon}{\Gamma} \to 0$).

III. — Équation de transport

1° **Champ scalaire.** — Appliquons au système un champ extérieur scalaire dérivant d'un potentiel :

$$\Phi(r, t) = \Phi(q)e^{i(qr - \varepsilon t)} + \text{c. c.}$$

l'hamiltonien d'interaction H_e est de la forme :

$$H_e = \frac{1}{\Omega} \Phi(q)\, \rho(q)\, e^{-i\varepsilon t} + \text{c. c.}$$

L'opérateur de couplage Λ associé à cette perturbation est égal à :

$$\Lambda(\widehat{k}, \sigma, \varpi) = \frac{\Phi(q)}{\Omega} \Lambda_4(\widehat{k}\sigma, \varpi).$$

Considérons d'abord des forces d'interaction entre particules à courte portée : il n'y a pas de diagramme « impropre ». L'équation de Bethe-Salpeter (5.39-5.40) est donc satisfaite par l'opérateur de couplage Λ_4 tout entier. En additionnant (5.40) et (5.43), on obtient :

$$\Lambda^1_\mu(\widehat{k}\sigma, \varpi) + \Lambda^2_\mu(\widehat{k}\sigma, \varpi) = \widehat{\Lambda}_\mu(\widehat{k}\sigma) + \int \frac{d\widehat{k'}}{4\pi} \frac{\varepsilon \overline{F}^s(\widehat{k}, \widehat{k'}) + 2iJ(\widehat{k}, \widehat{k'})}{2i\Gamma + \varepsilon - v_{k'}.q} [\Lambda^1_\mu(\widehat{k'}\sigma, \varpi) + \Lambda^2_\mu(\widehat{k'}\sigma, \varpi)]. \quad (6.25)$$

En utilisant la relation (6.24), on déduit de (6.25) l'équation intégrale satisfaite par δn. Il ne reste qu'à expliciter $\widehat{\Lambda}_4(\widehat{k}\sigma)$ et $\Lambda^0_4(\widehat{k}\sigma, 0)$: on utilise pour cela les résultats du chapitre V, découlant des identités de Ward. On obtient l'équation suivante :

$$\varepsilon \delta n(k) - v_k.q\overline{\delta n}(k) - iF.v_k \delta(\varepsilon_k - \mu) = 2i \int \frac{d\widehat{k'}}{4\pi} J(\widehat{k}, \widehat{k'})\, \overline{\delta n}(k') - 2i\Gamma \overline{\delta n}(k) \quad (6.26)$$

où $F = -i\Phi(q)q$ est la force qui s'exerce sur chaque particule (on a pris Ω comme volume unité).

Supposons maintenant qu'il y ait interaction de Coulomb entre les particules : il faut introduire la partie « propre » $\tilde{\Lambda}_4$, reliée au Λ_4 total par (4.67) :

$$\Lambda_4(\widehat{k}\sigma, \varpi) = \frac{\tilde{\Lambda}_4(\widehat{k}\sigma, \varpi)}{\mathcal{E}(\varpi)} \quad (4.67)$$

δn et $\overline{\delta n}$ font intervenir Λ_4, alors que l'équation de Bethe-Salpeter est relative à $\tilde{\Lambda}_4$. Pour obtenir l'équation de transport, il suffit de multiplier le terme inhomogène par $1/\mathcal{E}(\varpi)$. La force appliquée F est donc réduite d'un facteur $\mathcal{E}$, ce qui traduit l'effet d'écran.

En utilisant (5.38) et (5.47), nous pouvons mettre le deuxième membre de (6.26) sous la forme :

$$2i\pi z^2 \sum_{k'} I_2(k, k')[\overline{\delta n}(k') - \overline{\delta n}(k)]\, \delta(\varepsilon_k - \varepsilon_{k'}) \quad (6.27)$$

(6.27) a la même forme que l'intégrale de collision (2.2). (6.26) est donc identique à l'équation de Landau (2.9) : nous avons démontré l'*équation de transport des quasi-particules en présence d'impuretés*. En « prime », nous obtenons l'expression du paramètre $U(k, k')$, qui pour des impuretés diluées est donné par :

$$U(k, k') = \frac{1}{\Omega} z^2 n_i \mid t(k, k', \mu) \mid^2. \tag{6.28}$$

Le résultat (6.28) incorpore toutes les corrections dues à l'interaction entre particules.

(6.26) est une équation intégrale en δn, équivalente à l'équation de Bethe-Salpeter. Il est intéressant de regarder d'où viennent les deux termes de l'intégrale de collision :

— considérons d'abord le terme « direct » : $2i\Gamma\overline{\delta n}(k)$; le facteur $2i\Gamma$ provient du dénominateur de la partie singulière du produit :

$$G(p + \varpi/2)\, G(p - \varpi/2),$$

écrite sous la forme (5.11); ce terme est donc relié aux diagrammes de type VI.2 *a*, contenant au moins deux lignes intermédiaires *renormalisées* (incluant des noyaux $M^{(1)}$);

— le terme « inverse » : $2i\pi z^2 \sum_{k'} I_2(k, k')\, \overline{\delta n}(k')\delta(\varepsilon_k - \varepsilon_{k'})$, provient directement des diagrammes de type VI.2 *b* contenant au moins un noyau d'interaction irréductible $I_2\delta(\omega - \omega')$.

La relation (5.47), expression du théorème optique, assure que la composante $l = 0$ de l'intégrale de collision est nulle.

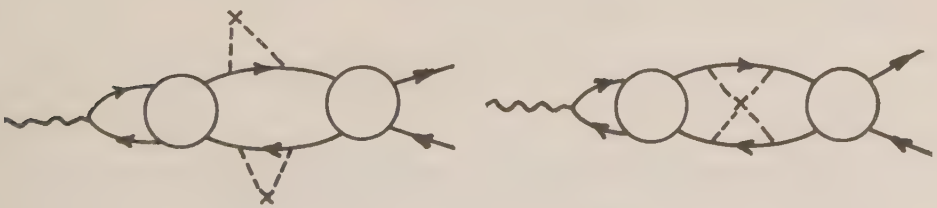

FIG. VI.2.

Pour terminer la démonstration, il reste à vérifier que les expressions de la charge totale et du courant total sont bien celles données par Landau :

$$\begin{aligned} \langle \rho(q) \rangle &= e^{-i\varepsilon t} \sum_{\kappa} \delta n(\kappa) \\ \langle J(q) \rangle &= e^{-i\varepsilon t} \sum_{\kappa} v_k \delta n(\kappa). \end{aligned} \tag{6.29}$$

D'après (6.7), on a :

$$\begin{aligned} \langle \rho(q) \rangle &= \frac{1}{2i\pi\Omega} \Phi(q) e^{-i\varepsilon t} S_{44}(\varpi) \\ \langle J_\alpha(q) \rangle &= \frac{1}{2\pi i\Omega} \Phi(q) e^{-i\varepsilon t} S_{\alpha 4}(\varpi). \end{aligned} \tag{9.30}$$

Prenons pour $\delta n(\kappa)$ l'expression (6.22). En utilisant les relations (4.65) et (4.66) et l'équation (5.41) reliant $\tilde{S}_{\mu 4}$ à $\tilde{\Lambda}_4^1$ et $\tilde{\Lambda}_4^2$, on trouve que les expressions (6.29) et (6.30) sont équivalentes.

Toute cette discussion se transpose sans difficulté au cas d'un *champ de spin* : il suffit de remplacer partout Λ_4 par Λ_5, etc.

2° **Champ vectoriel.** — Considérons maintenant un gaz d'électrons soumis à un champ électromagnétique de potentiel vecteur A :

$$H_e = -\frac{e}{\Omega c} A(q) . J(q) e^{-i\varepsilon t} + \text{c. c.}$$

La fonction de distribution des quasi-particules devient :

$$n(\kappa) = n_0(\kappa) + \delta n^p(\kappa) \tag{6.31}$$

δn^p mesure la déformation de n_0 due à H_e. C'est un terme « paramagnétique », donné par (6.22) où nous posons :

$$\Lambda = -\frac{e}{\Omega c} \sum_{\alpha} A_\alpha \Lambda_\alpha \tag{6.32}$$

(6.32) fait intervenir l'opérateur de couplage total. Λ_α est relié à sa partie « propre » $\tilde{\Lambda}_\alpha$ par l'équation (4.65), que nous pouvons écrire :

$$\Lambda_\alpha = \tilde{\Lambda}_\alpha - \frac{iV(q)}{2\pi\Omega} \tilde{\Lambda}_4 S_{4\alpha}. \tag{6.33}$$

La densité de courant au point r est donnée par :

$$J(r) = \sum_{K} n(K, r, t)\left(\frac{k}{m} - \frac{eA}{mc}\right) = \sum_{K} n\left(k + \frac{eA}{c}, r, t\right)\frac{k}{m}. \quad (6.34)$$

Pour retrouver la forme habituelle $\sum_{K} \delta n(K)\,\frac{k}{m}$, nous posons :

$$\begin{cases} n\left(k + \dfrac{eA}{c}\right) = n_0(k) + \delta n(k) \\ \delta n(k) = \delta n^p(k) + \delta n^d(k) \\ \delta n^d(k) = -\dfrac{eA}{c\Omega}\,.\,v_k\,\delta(\varepsilon_k - \mu) \end{cases} \quad (6.35)$$

δn^d est un terme « diamagnétique »; la somme δn est la fonction de distribution du chapitre I[er].

Il est commode de décomposer δn en deux morceaux δn_1 et δn_2 donnés par :

$$\delta n_1 = \delta n^d - \frac{e}{\Omega c} z_k\,\delta(\varepsilon_k - \mu)\sum_{\alpha} A_\alpha\left[\frac{(v_k.q - 2i\Gamma)\tilde{\Lambda}^1_\alpha + \varepsilon\tilde{\Lambda}^2_\alpha}{2i\Gamma + \varepsilon - v_k.q}\right] \quad (6.36)$$

$$\delta n_2 = \frac{-e}{\Omega c} z_k\,\delta(\varepsilon_k - \mu)\left(\frac{V(q)}{2\pi i\Omega}\right)\sum_{\alpha} A_\alpha S_{4\alpha}\left[\frac{(v_k.q - 2i\Gamma)\tilde{\Lambda}^1_4 + \tilde{\Lambda}^2_4}{2i\Gamma + \varepsilon - v_k.q}\right]. \quad (6.37)$$

En comparant (6.37) avec (6.22), nous voyons que δn_2 représente la réponse à un champ de potentiel scalaire :

$$\Phi(q) = \frac{4\pi e^2}{q^2}\,\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{-e}{\Omega c}\right)\sum_{\alpha} A_\alpha S_{4\alpha}$$

δn_2 satisfait donc l'équation (6.26), F étant remplacé par :

$$eE_p = -iq\Phi(q) = \frac{4\pi e^2}{q^2}\,\frac{q}{2\pi\Omega}\,\frac{e}{c}\sum_{\alpha} A_\alpha S_{4\alpha}.$$

On vérifie facilement que E_p satisfait l'équation :

$$\operatorname{div} E_p = 4\pi e\,\langle\,\rho(q)\,\rangle$$

où $\langle \rho(q) \rangle$ est la charge moyenne induite par le champ électromagnétique. δn_2 mesure donc la distorsion due au champ de Hartree.

Passons maintenant à δn_1 : on peut l'écrire sous la forme :

$$\delta n_1 = \frac{e}{\Omega c} z_k \, \delta(\varepsilon_k - \mu) \sum_\alpha A_\alpha \left[\frac{(2i\Gamma - v_k.q)\tilde{\Lambda}^1_\alpha - \varepsilon \tilde{\Lambda}^2_\alpha}{2i\Gamma + \varepsilon - v_k.q} - \hat{\Lambda}_\alpha \right]. \quad (6.38)$$

En combinant (6.38) et (5.39-5.40), on obtient :

$$\overline{\delta n_1} = - \frac{e}{\Omega c} z_k \, \delta(\varepsilon_k - \mu) \sum_\alpha A_\alpha \frac{\varepsilon(\tilde{\Lambda}^1_\alpha + \tilde{\Lambda}^2_\alpha)}{2i\Gamma + \varepsilon - v_k.q}. \quad (6.39)$$

A l'aide de (6.25) et (6.39), on vérifie que δn_1 satisfait l'équation intégrale (6.26), F étant cette fois donné par :

$$F = eE_{ext}, \qquad E_{ext} = \frac{i}{c} \varepsilon A = - \frac{1}{c} \frac{\partial A}{\partial t}$$

E_{ext} est le champ électrique produit par le potentiel vecteur A ; δn_1 mesure la réponse à ce champ extérieur. L'équation (6.26) est linéaire : δn satisfait donc la même équation que δn_1 et δn_2, F étant simplement remplacé par :

$$F = e(E_{ext} + E_P).$$

On retrouve exactement l'équation de transport (2.9), qui est ainsi *démontrée*.

La charge et le courant induits par le potentiel vecteur sont donnés par :

$$\begin{cases} \langle \rho(q) \rangle = - \dfrac{1}{2\pi i \Omega} \dfrac{e}{c} e^{-i\varepsilon t} \displaystyle\sum_\beta A_\beta S_{4\beta} \\ \langle J_\alpha(q) \rangle = - \dfrac{e}{\Omega c} e^{-i\varepsilon t} \left[\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\sum_\beta A_\beta S_{\alpha\beta} + \dfrac{N}{m} A_\alpha \right]. \end{cases} \quad (6.40)$$

En procédant de la même façon que pour un champ scalaire, on montre que (6.40) est équivalent à (6.29).

3° **Cas général.** — Pour un champ extérieur quelconque ($h(K)$ quelconque), on sait écrire l'équation intégrale satisfaite par la quantité $\delta n(K)$ définie par (6.14). Il suffit de combiner les relations (6.22) et (6.24) et l'équation de Bethe-Salpeter (5.39-5.40). Mais il reste une inconnue : l'opérateur $\hat{\Lambda}(K)$ dont on ne connaît l'expression exacte que dans le cas

où $h(K) = \lambda_\mu(K)$ (grâce aux identités de Ward). Physiquement, $\widehat{\Lambda}$ détermine la force exercée par le champ extérieur sur une quasi-particule (il correspond au terme d'entraînement dans l'équation de transport). On ne connaît cette force que lorsque le champ est couplé à une quantité *conservée* par l'interaction entre particules (charge, spin, courant).

IV. — Calcul de $\delta n(\varepsilon_k)$ dans un cas particulier

Nous terminons ce chapitre par l'étude du cas particulier envisagé au chapitre III. Nous nous plaçons dans les conditions suivantes :

— il n'y a *pas d'interaction* entre les fermions (au premier ordre en n_i les quasi-particules se réduisent aux particules nues);

— le système est soumis à un champ électrique E uniforme, de fréquence ε. On peut considérer ce champ comme dérivant d'un potentiel vecteur longitudinal A :

$$A = \frac{cE}{i\varepsilon}.$$

Le terme paramagnétique de (6.35), δn^p est donné par (6.21) avec :

$$\Lambda = -\frac{e}{\Omega c}\sum_\alpha A_\alpha \Lambda_\alpha.$$

Dans la mesure où on veut tenir compte de l'élargissement de $\delta n(\varepsilon_k)$, on doit écrire le terme diamagnétique sous la forme plus générale :

$$\delta n^d(K) = \frac{eA}{\Omega c}.v_k \frac{\partial n_0(K)}{\partial \varepsilon_k}$$

où la distribution à l'équilibre n_0 est donnée par :

$$n_0(K) = \frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, e^{i\eta\omega}\, G(K,\omega) = \frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega\, e^{i\eta\omega}}{\varepsilon_k - \omega - i\Gamma\ \mathrm{signe}\ (\omega - \mu)}$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arctg}\,\frac{\varepsilon_k - \mu}{\Gamma}\right]. \quad (6.41)$$

On trouve ainsi :

$$\delta n^d(\kappa) = -\frac{eE.v_k}{i\varepsilon\Omega}\left\{\frac{1}{\pi}\frac{\Gamma}{[(\varepsilon_k-\mu)^2+\Gamma^2]}\right\}. \tag{6.42}$$

Les équations (5.39) et (5.40) se résolvent très facilement; en faisant $\bar{F}^s = q = 0$, on trouve :

$$\Lambda^1_\alpha = v_{k_\alpha}$$

$$\Lambda^1_\alpha + \Lambda^2_\alpha = v_{k_\alpha}\left[\frac{2i\Gamma+\varepsilon}{2i(\Gamma-\Gamma_1/3)+\varepsilon}\right]. \tag{6.43}$$

En reportant dans (6.21), il vient :

$$\delta n^p = -\frac{e}{i\varepsilon\Omega}\frac{E.v_k}{2i\pi}\left[\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{2i(\Gamma-\Gamma_1/3)+\varepsilon}\right]$$
$$\mathrm{Log}\left[\frac{(\mu-\varepsilon_k+\varepsilon+i\Gamma)(\mu-\varepsilon_k-\varepsilon-i\Gamma)}{(\mu-\varepsilon_k+i\Gamma)(\mu-\varepsilon_k-i\Gamma)}\right]. \tag{6.44}$$

Lorsque $\varepsilon \ll \Gamma$, (6.44) se réduit à :

$$\delta n^p = \frac{eE.v_k}{i\Omega}\left[\frac{1}{\varepsilon}\left\{\frac{\Gamma/\pi}{[(\varepsilon_k-\mu)^2+\Gamma^2]}\right\}-\frac{1}{2i(\Gamma-\Gamma_1/3)}\left\{\frac{\Gamma/\pi}{[(\varepsilon_k-\mu)^2+\Gamma^2]}\right\}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2i\pi}\left\{\frac{\Gamma^2-(\varepsilon_k-\mu)^2}{[(\varepsilon_k-\mu)^2+\Gamma^2]^2}\right\}\right] \tag{6.45}$$

d'où finalement :

$$\delta n(\kappa) = \frac{eE.v_k}{2\Omega}\left[\frac{1}{(\Gamma-\Gamma_1/3)}\left\{\frac{\Gamma/\pi}{[(\varepsilon_k-\mu)^2+\Gamma^2]}\right\}+\frac{\Gamma^2-(\varepsilon_k-\mu)^2}{\pi[(\varepsilon_k-\mu)^2+\Gamma^2]^2}\right]. \tag{6.46}$$

En comparant avec (3.27), nous voyons que la fonction $h(\varepsilon_k)$ définie au chapitre III est donnée par :

$$h(\varepsilon_k) = \frac{\Gamma/\pi}{[(\varepsilon_k-\mu)^2+\Gamma^2]}+\frac{(\Gamma-\Gamma_1/3)}{\pi}\left\{\frac{\Gamma^2-(\varepsilon_k-\mu)^2}{[(\varepsilon_k-\mu)^2+\Gamma^2]^2}\right\}. \tag{6.47}$$

$h(\varepsilon_k)$ n'est pas une simple fonction de Lorentz. Cependant, si nous développons (6.47) en puissances de $\Gamma/(\varepsilon_k-\mu)$, nous retrouvons le résultat de Kohn et Luttinger (3.35). Remarquons que le premier terme de (6.47) correspond à un *déplacement* de la distribution n_0, alors que le second terme décrit une *déformation* de cette distribution.

CHAPITRE VII

VALIDITÉ DES RÉSULTATS. GÉNÉRALISATIONS POSSIBLES

Pour établir l'équation de transport, nous avons fait, au départ, un certain nombre d'approximations. Certaines sont essentielles à la résolution de notre problème, d'autres permettent seulement de simplifier les calculs. Nous allons maintenant examiner rapidement ces approximations : ceci nous permettra de préciser les conditions de validité de nos résultats et de mentionner éventuellement les généralisations possibles.

1° **La condition** $\hbar/\tau \ll E_f$. — Elle intervient à toutes les étapes du calcul, sous des formes mathématiques diverses. Par exemple :

— nous supposons partout que la contribution des impuretés à l'énergie propre des quasi-particules est petite comparée à l'énergie de Fermi; nous négligeons la partie réelle de $M^{(1)}$ (en remplaçant ξ_k par ε_k) et nous ne gardons la partie imaginaire Γ que lorsqu'elle donne naissance à des termes d'ordre Γ/qv_f ou Γ/ε (voir en particulier le remplacement des fonctions de « largeur » Γ par des fonctions de Dirac);

— nous ignorons l'influence des impuretés sur l'interaction irréductible I_1 (que nous remplaçons par I^0) : on peut montrer que les termes ainsi négligés sont aussi d'ordre Γ/E_f.

Physiquement, τ est l'intervalle de temps qui sépare deux collisions consécutives, $\Gamma \sim \hbar/\tau$ représente l'incertitude sur l'énergie des quasi-particules à la surface de Fermi. La condition $\hbar/\tau \ll E_f$ assure :

a) que la durée de vie d'une quasi-particule (d'ordre τ) est suffisamment longue pour que la notion même de quasi-particule ait un sens (voir chap. I[er]);

b) que le libre parcours moyen $l \sim v_f\tau$ des électrons est grand devant la longueur d'onde de de Broglie $\lambda = \dfrac{1}{k_f}$. Dans le cas contraire on ne peut pas définir une trajectoire de l'électron : il n'y a pas « diffusion » d'un élec-

tron par les impuretés, mais plutôt un phénomène analogue à la propagation d'une onde dans un milieu désordonné. Cette condition est donc absolument *essentielle*. Pratiquement, elle est réalisée dans les métaux usuels.

2° **Influence de la densité d'impureté.** — Dans la mesure où la condition précédente est réalisée les impuretés ne se manifestent qu'à travers le paramètre Γ (mesurant l'amortissement des quasi-particules à la surface de Fermi) et l'interaction I_2 (reliée elle-même à Γ par le théorème optique).

Au cours de ce travail, nous avons calculé Γ et I_2 au premier ordre en n_i (négligeant les termes d'ordre $\left(\frac{n_i}{n_{\text{él}}}\right)^2$, où $n_{\text{él}}$ est la densité d'électrons). En principe, cette seconde approximation n'est pas essentielle : on aurait pu dériver une équation de transport en considérant Γ et I_2 comme des paramètres. En fait, cette « généralisation » est illusoire, car la condition $\Gamma \ll E_F$ entraîne en général $n_i \ll n_{\text{él}}$. Prenons par exemple pour le potentiel des impuretés $W(k, k')$ un potentiel de Coulomb écranté :

$$W(k, k') = \frac{4\pi Ze^2}{q_D^2 + (k - k')^2}$$

où Ze est la charge d'une impureté et $q_D \sim k_f(r_s)^{1/2}$ l'inverse du rayon d'écran. En utilisant l'approximation de Born pour t, on trouve à partir de (4.44) [*17*] :

$$\frac{\Gamma}{E_f} \sim Z \frac{r_s}{1 + r_s} \frac{n_i}{n_{\text{él}}} \tag{7.1}$$

r_s ne pouvant être très petit, on a toujours $\Gamma/E_F \sim n_i/n_{\text{él}}$. Les deux conditions précédentes sont donc équivalentes. Notons simplement qu'*en principe* l'équation de transport resterait valable pour un système contenant des impuretés nombreuses ($n_i \gtrsim N$), *faiblement* couplées aux particules ($\Gamma \ll E_F$).

3° **Influence de la durée des collisions.** — Lors de l'établissement des équations de Bethe-Salpeter à la surface de Fermi, nous avons négligé la dépendance en ω de $t(kk\omega)$ et de $I_2(kk'\omega)$ sur des intervalles de fréquence d'ordre ε ou Γ. Cette approximation est légitime si on a :

$$n_i \frac{dt(k, k, \omega)}{d\omega} \ll 1. \tag{7.2}$$

La condition (7.2) est très importante. Si elle n'est pas satisfaite, on ne peut pas écrire la partie cohérente de G sous la forme (4.36) avec un Γ *constant* (sur l'intervalle de fréquence qui nous intéresse). Si Γ dépend de ω l'intégrale de collision ne peut plus s'écrire sous la forme (6.27).

Pour comprendre la signification physique de (7.2), revenons à la représentation « temps ». L'extension dans le temps de la matrice t définit la *durée* d'une collision, t_c. La condition (7.2), qui peut s'écrire :

$$t_c \ll \tau \tag{7.3}$$

exprime donc que la durée d'une collision est petite par rapport à l'intervalle de temps qui sépare deux collisions successives. En d'autres termes les collisions doivent être *indépendantes* les unes des autres. Si $t_c \gtrsim \tau$, les collisions se « recouvrent » : on ne peut plus en isoler une, *a fortiori*, définir un « temps de collision » ou une « durée de vie » des particules.

Pratiquement, si on suppose que la portée de l'interaction électron-impureté est d'ordre $\frac{1}{k_f}$, $n_i \frac{dt}{d\omega}$ est d'ordre Γ/E_f. La condition (7.3) est donc réalisée si $\Gamma \ll E_f$.

4° **Introduction des corrélations entre les impuretés.** — Nous nous sommes limités, dans cette étude, au cas où il n'y a aucune corrélation entre les positions R_i des impuretés. Nous indiquons maintenant brièvement comment on pourrait traiter le cas où les impuretés ne sont pas complètement indépendantes les unes des autres.

Considérons la quantité :

$$P^{(2)} = \sum_{i \neq j} e^{ik(R_i - R_j)}. \tag{7.4}$$

Si les impuretés sont réparties au hasard, la moyenne de $P^{(2)}$ sur toutes les configurations d'impuretés est nulle sauf si $k = 0$:

$$\langle P^{(2)} \rangle = n_i^2 \delta_{k,0}.$$

Lorsqu'on tient compte des corrélations entre les impuretés, la moyenne de $P^{(2)}$ n'est plus nulle, on a :

$$\langle P^{(2)} \rangle = n_i S^{(2)}(k)$$

où $S^{(2)}(k)$ est la transformée de Fourier de la fonction de corrélation de deux impuretés. De même la moyenne de :

$$P^{(3)} = \sum_{i \neq j \neq l} e^{ik(R_i - R_j)} e^{ik'(R_j - R_l)} \tag{7.5}$$

s'exprime en fonction de la transformée de Fourier de la fonction de corrélation de trois impuretés :

$$\langle P^{(3)} \rangle = n_i S^{(3)}(k, k').$$

Les fonctions $S^{(2)}$, $S^{(3)}$, etc. s'introduisent naturellement dans les calculs. On peut les représenter dans les diagrammes par des lignes « mixtes » reliant les faisceaux de lignes d'impuretés. Par exemple le diagramme VII (*a*) contient le facteur $n_i S^{(2)}(k_1 - k_2)$, le diagramme VII (*b*), le facteur $n_i S^{(3)}(k_1 - k_2, k_1 - k_3)$:

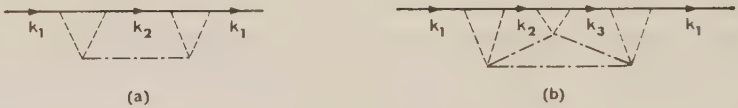

FIG. VII.

Nous n'entrerons pas dans le détail des calculs. Nous remarquons simplement que le formalisme utilisé dans ce travail peut se généraliser sans difficulté majeure au cas où il existe des corrélations entre les positions des impuretés.

Conclusion. — Revenons pour terminer à la conclusion du chapitre III. Nous avions vu que pour un système d'électrons sans interaction, la condition de validité de l'équation de transport était $\hbar/\tau \ll E_f$. *Cette conclusion reste valable pour un système avec interaction.* Nous constatons de nouveau que la condition de Peierls $\hbar/\tau \ll kT$ n'intervient pas.

CONCLUSION

Nous avons établi, à l'aide des méthodes de la théorie quantique des champs, l'équation de transport des quasi-particules pour un liquide de Fermi impur. L'équation semi-phénoménologique de Landau se trouve ainsi démontrée dans le cas où les particules du système subissent des collisions avec des impuretés statiques. Cette équation donne la réponse linéaire du système à une excitation périodique (de vecteur d'onde q et de fréquence ε d'échelle macroscopique), à température nulle, lorsque le temps de collision τ est tel que $\hbar/\tau \ll E_f$. Les résultats sont valables à l'ordre zéro en qv_f/E_f, ε/E_f et $\hbar/\tau E_f$. Le paramètre $\dfrac{\hbar}{\tau kT}$ n'affecte pas la validité de l'équa-

tion de transport, mais seulement la distribution en énergie des quasi-particules (conformément au résultat avancé autrefois par Landau).

La technique que nous avons utilisée permet de résoudre le problème de façon « self consistent » à l'ordre le plus bas en $\hbar/\tau E_f$. A toutes les étapes du calcul, nous voyons comment se manifestent les collisions à l'échelle microscopique. Physiquement, ces collisions imposent une durée de vie finie aux quasi-particules proches de la surface de Fermi. Ceci se traduit dans notre formalisme par une discontinuité de l'énergie propre et une singularité de certains opérateurs de couplage. Le fait que les collisions conservent l'énergie et le spin, mais non la quantité de mouvement, apparaît également dans les calculs, par exemple à propos des identités de Ward.

Dans l'équation de transport, l'effet des impuretés se traduit par la présence d'une « intégrale de collision », qui intervient sous la forme habituelle. On voit clairement l'origine « diagrammatique » du terme direct et du terme inverse. L'expression trouvée pour la probabilité de transition inclut les effets d'interaction entre les particules.

Il resterait à généraliser cette étude au cas des températures non nulles. Le formalisme mathématique — beaucoup plus élaboré qu'à température nulle — laisse prévoir des calculs assez compliqués, mais il ne se présente aucune difficulté de principe.

Je remercie M. le Professeur Y. Rocard de m'avoir permis de travailler au Laboratoire de Physique de l'École Normale Supérieure et M. le Professeur P. Aigrain qui m'a accueillie dans son équipe de Physique des Solides.

Je suis très reconnaissante au Professeur Ph. Nozières de m'avoir initiée à la physique théorique. Je tiens à lui exprimer ma profonde gratitude pour les conseils et l'aide qu'il n'a cessé de me prodiguer.

BIBLIOGRAPHIE

Ouvrages généraux

[1] P. Nozières, *Le problème à* N *corps*, Dunod.
[2] P. Nozières and D. Pines, *Theory of quantum liquids* (à paraître).
[3] A. A. Abrikosov, L. P. Gor'kov and I. E. Dzyaloshinski, *Methods of quantum field theory in statistical Physics*, Prentice Hall.

Références

Chapitres I^er et II.

[4] L. D. Landau, *J. E. T. P.*, t. 30, 1956, p. 1058 (*Sov. Phys.*, t. 3, p. 920); *J. E. T. P.*, t. 32, 1957, p. 59 (*Sov. Phys.*, t. 5, p. 101).

[5] V. P. Silin, *J. E. T. P.*, t. 33, 1957, p. 495 (*Sov. Phys.*, t. 6, p. 387); *J. E. T. P.*, t. 34, 1958, p. 707 (*Sov. Phys.*, t. 7, p. 486).
[6] M. Ya. Azbel, *J. E. T. P.*, t. 39, 1960, p. 1138 (*Sov. Phys.*, t. 12, p. 793).

Chapitre III.

[7] F. Bloch, *Z. Phys.*, t. 52, 1928, p. 555.
[8] R. E. Peierls, *The quantum Theory of solids*, Clarendon Press.
[9] J. S. Van Wieringen, *Proc. Phys. Soc.*, t. A67, 1954, p. 206.
[10] W. Kohn et J. M. Luttinger, *Phys. Rev.*, t. 108, 1957, p. 590; t. 109, 1958, p. 189.
[11] D. A. Greenwood, *Proc. Phys. Soc.*, t. 71, 1958, p. 585.
[12] S. F. Edwards, *Phil. Mag.*, t. 3, 33, 1958, p. 1020.
[13] G. V. Chester et A. Thellung, *Proc. Phys. Soc.*, t. 73, 1959, p. 745.

Chapitres IV, V, VI.

[14] V. M. Galitskii et A. B. Migdal, *J. E. T. P.*, t. 34, 1958, p. 139 (*Sov. Phys.*, t. 7, p. 96).
[15] L. D. Landau, *J. E. T. P.*, t. 35, 1958, p. 97 (*Sov. Phys.*, t. 8, p. 70); *J. E. T. P.*, t. 37, 1959, p. 62 (*Sov. Phys.*, t. 10, p. 45).
[16] J. M. Luttinger et P. Nozières, *Phys. Rev.*, t. 127, 1962, p. 1423, 1431.
[17] J. S. Langer, *Phys. Rev.*, t. 120, 1960, p. 714; t. 124, 1961, p. 1003; t. 127, 1962, p. 5; t. 128, 1962, p. 110.

APPENDICE A

1° Considérons l'intégrale :

$$A=\int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon_k \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{1}{\left(\varepsilon_k^+ - \omega^+ - i\Gamma \text{ signe } (\omega-\mu)\right)\left(\varepsilon_k^- - \omega^- - i\Gamma \text{ signe } (\omega-\mu)\right)} \quad (A.1)$$

$$\varepsilon_k^{\pm} = \varepsilon_k \pm v_k.q/2 \qquad \omega^{\pm} = \omega \pm \varepsilon/2;$$

— si on intègre d'abord sur ε_k, on trouve $A = 0$, essentiellement parce que les deux pôles de l'intégrant sont du même côté de l'axe réel dans le plan complexe ε_k;

— si on intègre d'abord sur ω, il vient :

$$A=\int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon_k \frac{1}{v_k.q-\varepsilon} \text{ Log } \frac{\left(\mu-\varepsilon_k^+ + \varepsilon/2 - i\Gamma\right)\left(\mu-\varepsilon_k^- - \varepsilon/2 + i\Gamma\right)}{\left(\mu-\varepsilon_k^- - \varepsilon/2 - i\Gamma\right)\left(\mu-\varepsilon_k^+ + \varepsilon/2 + i\Gamma\right)} = -2i\pi \quad (A.2)$$

La différence des résultats provient de la divergence logarithmique de l'intégrale (A.1). Pour résoudre le dilemme, nous utiliserons un argument « physique ». Dans un diagramme l'intégrant de (A.1) est généralement multiplié par une fonction $f(k, \omega)$ qui tend vers zéro lorsque ε_k est infiniment grand (parce que $V(k)$ et $W(k)$ tendent vers zéro). $f(k, \omega)$ assure la convergence de l'intégrale sur ω et ε_k. Pour que ce facteur de convergence joue son rôle, il faut *intégrer sur ε_k en dernier.* La seule exception concerne le diagramme de la figure A, intervenant dans les fonctions de corrélation. Mais ces fonctions sont parfaitement définies dans la représentation « temps ». L'ambiguïté vient de la transformation de Fourier $S(t) \to S(\omega)$. Pour éviter cette ambiguïté, il suffit de revenir d'abord à $S(t)$, donc d'intégrer sur ω d'abord.

2° Ce point étant éclairci, considérons l'intégrale :

$$B(q, \varepsilon, \Gamma)=\int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon_k \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{f(k, \omega)}{\left(\varepsilon_k^+ - \omega^+ - i\Gamma \text{ signe } (\omega-\mu)\right)\left(\varepsilon_k^- - \omega^- - i\Gamma \text{ signe } (\omega-\mu)\right)} \quad (A.3)$$

où $f(k, \omega)$ est une fonction régulière de ε_k. Nous cherchons à voir dans quelle mesure on peut remplacer $B(q, \varepsilon, \Gamma)$ par $B(0, 0, 0)$. Nous négligeons tous les termes d'ordre $(qv, \varepsilon, \Gamma)/E_f$: seule compte la valeur de $f(k, \omega)$ au voisinage des singularités de l'intégrant.

a) Si $f(k, \omega)$ est de la forme $\begin{cases} f(k)\,\delta(\omega - \omega') \\ f(k)\,y(\omega, \varepsilon) \end{cases}$, l'intégrale sur ω et ε_k est convergente. On peut inverser l'ordre des intégrations et intégrer sur ε_k d'abord :

— les singularités provenant du dénominateur de (A.3) donnent une contribution nulle;

— les singularités de $f(k, \omega)$ donnent une contribution développable en $qv, \varepsilon, \Gamma)/E_f$.

On a donc :

$$B(q, \varepsilon, \Gamma) = B(0, 0, 0).$$

Un raisonnement analogue justifie le passage de (5.10 *a*) à (5.10 *b*).

b) Si $f(k, \omega)$ est une fonction régulière de ω, au voisinage des singularités, c'est-à-dire au voisinage de $\varepsilon_k = \omega = \mu$, on peut remplacer $f(k, \omega)$ par $f(k_f, \mu)$. On retrouve une intégrale du type (A.1). Le résultat (A.2) étant indépendant des rapports qv/ε et qv/Γ, on a de nouveau : $B(q, \varepsilon, \Gamma) = B(0, 0, 0)$.

FIG. A.

APPENDICE B

Pour résoudre les équations (5.39) et (5.40), il est commode de poser :

$$\frac{\Lambda_\mu^1(\widehat{k\sigma}, \varpi) + \Lambda_\mu^2(\widehat{k\sigma}, \varpi)}{2i\Gamma + \varepsilon - v_k.q} = C^\mu(\theta, \varphi) \tag{B.1}$$

où θ est l'angle entre k et q. D'après (5.40) et (5.43), $C^\mu(\theta, \varphi)$ est solution de l'équation intégrale :

$$(2i\Gamma + \varepsilon - v_f q \cos\theta) C^\mu(\theta, \varphi) = \widehat{\Lambda}_\mu(\theta, \varphi) + \int \frac{\widehat{dk'}}{4\pi} [\varepsilon \bar{F}^\mu(\cos\xi) + 2iJ(\cos\xi)] C^\mu(\theta', \varphi') \tag{B.2}$$

où ξ est l'angle entre k et k'. On résout (B.2) par approximations successives, en développant toutes les fonctions en harmoniques sphériques $Y_{lm}(\theta, \varphi)$.

a) On voit tout de suite que Λ_4, Λ_5 et la composante Λ_1 parallèle à q, ont la symétrie $m = 0$. Pour $\mu = 1, 4, 5$ on peut donc définir des coefficients c_l^μ tels que :

$$C^\mu(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} c_l^\mu P_l^0(\cos\theta) \tag{B.3}$$

où les $P_l^0(\cos\theta)$ sont les polynômes de Legendre de symétrie $m = 0$.

D'autre part, on a :

$$\widehat{\Lambda}_4 = \frac{1}{z}(\beta_0^s)^{-1} \qquad \widehat{\Lambda}_5 = \frac{\sigma}{z}(\beta_0^a)^{-1} \qquad \widehat{\Lambda}_1 = \frac{k\cos\theta}{zm^*}. \tag{B.4}$$

L'équation (B.2) nous fournit une relation de récurrence entre les c_l^μ. Pour $\mu = 4$, par exemple, on a :

$$\left(2i(\Gamma - \Gamma_l/2l+1) + \varepsilon/\beta_l^s\right) c_l^4 - v_f q\left(\frac{l+1}{2l+3} c_{l+1}^4 + \frac{l}{2l-1} c_{l-1}^4\right) = (1/z\beta_0^s)\delta_{l,0}. \tag{B.5}$$

A partir de $l = 1$, on a :

$$c_{l+1}^4/c_l^4 \sim q v_f/\Gamma.$$

Nous nous limitons donc aux termes $l = 0$ et $l = 1$, donnés par les deux premières relations de récurrence (où l'on fait $c_2^4 = 0$). On trouve sans difficulté :

$$C^4 = \frac{1}{z}\left[\frac{\varepsilon + i/\tau + \beta_1^s v_k.q}{\varepsilon(\varepsilon + i/\tau) - s^2q^2}\right] \qquad C^5 = \frac{\sigma}{z}\left[\frac{\varepsilon + i/\tau_\sigma + \beta_1^a v_k.q}{\varepsilon(\varepsilon + i/\tau_\sigma) - s_\sigma^2 q^2}\right] \tag{B.6}$$

$$C^{//} = \frac{1}{z}\left[\frac{\varepsilon k_{//}/m + s^2 q}{\varepsilon(\varepsilon + i/\tau) - s^2q^2}\right] \tag{B.7}$$

où $C//$ et $k_{//}$ désignent les composantes C^α et k_α parallèles à q. Les quantités s, s_σ, τ, τ_σ sont définies par (5.53).

b) Les composantes Λ_α perpendiculaires à φ ont la symétrie $m = 1$. En développant les fonctions en polynômes de Legendre d'ordre 1, P_l^1 (cos θ), on obtient une relation de récurrence analogue à (B.5). Il n'y a pas de composante $l = 0$; en s'arrêtant à $l = 1$, pour les mêmes raisons que précédemment, on obtient :

$$C^\perp = \frac{1}{z}\left[\frac{k_\perp/m}{\varepsilon + i/\tau}\right]. \tag{B.8}$$

Opérateurs de couplage. — De (5.40) et (5.43) on déduit les relations entre Λ_μ^1, Λ_μ^2 et C^μ :

$$\begin{aligned} \Lambda_\mu^1(\theta, \varphi) &= \widehat{\Lambda}_\mu(\theta, \varphi) + \varepsilon \int \frac{\widehat{dk'}}{4\pi} \overline{F}^\mu (\cos \xi)\, C^\mu(\theta', \varphi') \\ \Lambda_\mu^2(\theta, \varphi) &= 2i \int \frac{\widehat{dk'}}{4\pi} J (\cos \xi)\, C^\mu(\theta', \varphi'). \end{aligned} \tag{B.9}$$

En insérant les résultats (B.6) à (B.8) dans (B.9), on trouve les expressions (5.50) à (5.52).

Fonctions de corrélation. — En combinant (B.1) et (5.41), on obtient la relation :

$$S_{\mu\nu}(\varpi) = \widehat{S}_{\mu\nu} + i\nu(0) z^2 \pi\varepsilon \sum_{\sigma'} \int \frac{\widehat{dk'}}{4\pi} \Lambda_\mu(\theta', \varphi')\, C^\nu(\theta', \varphi') \tag{B.10}$$

d'où l'on déduit les résultats (5.61).

Manuscrit reçu le 4 décembre 1964.

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

La vitesse du son.

VU ET APPROUVÉ :

Paris, le 23 décembre 1964.

Le Doyen de la Faculté des Sciences de Paris,

Marc ZAMANSKY.

VU ET PERMIS D'IMPRIMER :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

Jean ROCHE.

DÉPÔT LÉGAL ÉD. N° 1304*a*.

IMPRIMÉ EN FRANCE

IMPRIMERIE BARNÉOUD S. A. LAVAL, N° 5054. 7-1965.

65-01